现代应用数学丛书

随机过程的应用

〔日〕河田龍夫 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

随机过程的应用

〔日〕河田龍夫 著
刘璋温 譯
王寿仁 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分六章。第1章从概率論的观点，用积分方程的方法討論了更新过程；第2～5章叙述平稳过程及其应用，其中包括預报論以及噪声过程；第6章介紹了排队論，作为 Марков 过程的一个应用。本书可供高等学校数学系和物理系师生、研究工作者以及工程师作参考。

現代应用数学丛书

随 机 过 程 的 应 用

原 书 名　確率過程論の応用
原 著 者　〔日〕河 田 龍 夫
原出版者　岩　波　书　店
譯　　者　刘　璋　温
校　　者　王　寿　仁

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 3 22/32　字数 82,000
1962年4月第1版　1962年4月第1次印刷
印数 1—5,000

統一书号：13119·457
定　价：(十四) 0.64元

出 版 說 明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"现代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠挚的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书是根据河田龍夫著“確率过程論の応用”（岩波讲座現代应用数学，东京，1957）譯出的。此书着重介紹近年急速发展起来的平稳过程論和 Марков 过程論的某些应用。

本书的內容共分三个部分。第1章为第一部分，介紹了更新过程。著者在这一章中从概率論的观点，用积分方程的方法对更新方程作了比較透徹的闡述。第2～5章为第二部分，介紹了平稳过程及其应用。第2章叙述平稳过程的基本事項，作为以下三章所必需的預备知識；而作为平稳过程的应用，第2，3和4章分别討論了时間序列数据的舍入問題，訊息論中的 A. Колмогоров 和 N. Wiener 的預报問題，以及噪声过程的数学分析。第6章为第三部分，介紹了排队論，作为 Марков 过程的一个应用。排队論及其应用是运筹学（Operations Research）的一个主要分支。

正如著者在后記中所述，本书的叙述相当重視严格的理論依据。由于著者笔法簡洁而精炼，虽然本书的篇幅不多，但对上列問题都作了本质上的闡述。对于具有初步概率論和 Fourier 分析知識的讀者来說，閱讀本书将不会感到很多困难。但是，作为一本应用的著作来說，本书缺乏具体例子，这可能会使从事实际工作的讀者感到不便。这些讀者可在本书的基础上閱讀有关文献，以弥补这个不足。

譯稿承王寿仁先生校閱一遍，提出了許多宝贵意見。譯者在此表示深切的感謝。

刘 璋 温　1961年12月北京

目　录

第1章 更新过程

預报将来人口的問題，一向就是統計学的問題。若能把初始状态完全規定下来，則完全可以描述将来人口的发展，显然这时需要与年齡有关的死亡率和增殖率。但是在原始的初等模型中，通常不計及年齡构造，而假設人口增长速度为相等。这就是說，当令 $N(t)$ 表示在时刻 t 时的人口，ν 表示每个个体在单位时間内的瞬时增长率时，假設 $N'(t)=\nu N(t)$ 成立。由此便可导出 $N(t)=N(0)e^{\nu t}$。又当人口增加时，假設阻止人口无限增长的因素起作用，便得到人口的邏輯斯諦曲綫。从这种原始模型出发，还可进一步构造把女性增殖率考虑在内的人口增长模型。这时就假設男性的人数与女性的人数相等，以便考虑总人口的增长。下面的模型是由 W. Feller 提出的。在时刻 t（令 0 为初始状态）时，有从 $t=0$ 时即活着而一直活到时刻 t 的女子和在中途誕生而一直活到时刻 t 的女子，若令 $\eta(x)$ 表示女子在 $t=0$ 的年龄分布密度，并令 $p_x(t)$ 为 x 岁的女子在时刻 t 生出新女子的瞬时增殖率，則由前一种女子所生的女子的比率为 $\int_0^\infty \eta(x)p_x(t)dx=g(t)$。又若令 $u(t)$ 为在时刻 t 誕生新女子的瞬时增殖率（女子总数与新誕生的女子的比率），并令 $f(t)$ 为新誕生的女子在 t 以后生出新女子的比率（更新率，即在 $t=0$ 誕生的女子中，在 $(t, t+\Delta t)$ 之間生出新女子的比率。这里面已經考虑到死亡率），則得到积分方程 $u(t)=g(t)+\int_0^t u(t-x)f(x)dx$。由这个 $u(t)$ 可以求出女性人口的增长。这个积分方程作为更新积分方程，将在 §4 中討論。

更换机器零件的問題，長期以来也为很多人所研究。当零件

損耗时，就換上新的零件。这說明对零件也可以考虑它的寿命。这时，我們的問題是，随着时間的推移，零件的年龄分布是什么。又有，到某个时刻为止，平均应該更換多少次零件，換句話說，就是有多少輩数的問題。所有这些都可以归結为与上述完全相同的积分方程的問題。我們将从概率論的观点来闡明这一点。从实际問題来看，这在下述問題中得到应用：机器上的零件究竟使用到寿命終止时才更換，还是在适当的时候更換，或者一齐更換来得好，等等。在这些問題中所考慮的当然是零件損耗对机器效率的影响。

輩数和年龄分布問題不仅在遺傳学中有应用，而且在貨車編組的排队問題中也得到应用。到站的一列車輛中开往特定方向的貨車并不那么多，各貨車应等多久才能汇集起来編成一定的牵引輛数，这类問題占貨車停留問題的重要部分。其实不仅在停車場，而且一般在窗口❶的排队中也經常产生这类問題。本章将对这些更新过程，即世代相继地更新的过程，从概率論的观点，用积分方程的方法，討論其数学性质。

§1　平均輩数

設有一个集合，其中每个个体死亡后，新的个体誕生（換上新的个体）。我們来研究这个集体的年龄分布。更換机器零件的問題，也可用这种形式来討論。

把每个个体的寿命看做随机变数，并令它的分布函数为 $F(x)$ $(F(-0)=0)$。当某个个体的年龄为 x 时，令 $F_x(y)$ 表示它的殘年不超过 y 的概率，即

$$F_x(y)=\frac{F(x+y)-F(x)}{1-F(x)}. \tag{1.1}$$

令 x_0 表示一个个体在 $t=0$ 时的年龄，并假設它再活 X_1 年，

❶ "窗口"指顾客来接受服务的地方，例如火車站的售票处等。——譯者注

而在x_0+X_1死亡。第二个个体活了X_2年，下一个个体活了X_3年，过程这样继續下去。下面，我們来討論到时間t为止的死数，以及在t的年龄分布，等等。

寿命的分布是$F(x)$，此处令$F(+0)<1$，这就是假設生存的概率为正。$X_1=X_1(\omega)$以(1.1)中所规定的$F_{x_0}(x)$作为它的分布函数。$X_2=X_2(\omega)$，$X_3=X_3(\omega)$，… 具有相同的分布函数$F(x)$。令$N(t)$表示下列各数

$$X_1,\ X_1+X_2,\ \cdots$$

之中小于t的个数，即$\sum_1^{N(t)} X_i<t$，$\sum_1^{N(t)+1} X_i\geqslant t$。又設

$$X(t)=\begin{cases}t-(X_1+\cdots+X_{N(t)}) & (\text{当 } N(t)\geqslant 1),\\ x_0+t & (\text{当 } N(t)=0).\end{cases}$$

我們将考虑随机过程$N(t)$和$X(t)$。

定理 1.1❶ 令X_1, X_2, X_3, … 为独立随机变数，并令X_2, X_3, … 具有相同的分布函数$F(x)$。又設

$$\begin{gathered}X_i\geqslant 0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots),\\ 0<\mathrm{E}X_2=m\leqslant\infty.\end{gathered}\tag{1.2}$$

于是

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{m}\right)=1.\tag{1.3}$$

又$\mathrm{E}N(t)<\infty$，且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=\frac{1}{m},\tag{1.4}$$

此处$\mathrm{E}X$表示X的数学期望。

証明 当$m<\infty$时，假定定理已被証明。这时先証明当$m=\infty$时定理也成立。設

❶ J. L. Doob [1].

$$X_j^{(M)}=\begin{cases}X_j & (0\leqslant X_j\leqslant M),\\ 0 & (X_j>M).\end{cases}$$

令使 $\sum_1^n X_j^{(M)}<t$ 的最大的 n 为 $N^{(M)}(t)$，于是由 $X_j^{(M)}\leqslant X_j$ 推出 $N(t)\leqslant N^{(M)}(t)$。因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N^{(M)}(t)}{t}=\frac{1}{\mathrm{E}X_2^{(M)}}. \tag{1.5}$$

这个不等式右边极限的存在和等号的成立，是由以上假定而得到的。同样

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{N^{(M)}(t)}{t}=\frac{1}{\mathrm{E}X_2^{(M)}} \tag{1.6}$$

概率为1地成立。令 $M\to\infty$ 便有 $\mathrm{E}X_2^{(M)}\to\infty$，因而得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=0$$

(概率为1地)。

其次，令 $\mathrm{E}X_2<\infty$，往証(1.3)和(1.4)。因为 $X_2, X_3, \cdots$ 具有相同的分布，所以由强大数法则及关系 $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{X_1}{n-1}=0\right)=1$ 得到

$$\begin{aligned}P&\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=m\right)\\ &=P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n-1}=m\right)\\ &=P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_2+\cdots+X_n}{n-1}=m\right)=1.\end{aligned}$$

故对满足 $0<\varepsilon<m$ 的任意正数 ε，概率为1地存在着 $n_\varepsilon=n_\varepsilon(\omega)$，并且当 $n>n_\varepsilon$ 时，就有

$$(m-\varepsilon)n\leqslant X_1+\cdots+X_n\leqslant(m+\varepsilon)n. \tag{1.7}$$

因为 $\sum_1^{N(t)} X_i<t$，所以若 $N(t)>n_\varepsilon$，则由(1.7)左边不等式推出

$$N(t)\leqslant\frac{t}{m-\varepsilon}. \tag{1.8}$$

若在(1.7)中令 $N(t)+1$ 代替 n，则由 $t \le \sum_{1}^{N(t)+1} X_i$ 推出

$$\frac{t}{m+\varepsilon} \le N(t)+1. \tag{1.9}$$

故当 $N(t) > n_\varepsilon$ 时

$$\frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{t} \le \frac{N(t)}{t} \le \frac{1}{m-\varepsilon}. \tag{1.10}$$

但是 $P(\lim\limits_{t\to\infty} N(t)=\infty)=1\,(m<\infty)$，所以(1.10)概率为1地成立，从而得到(1.3)。

下面往証(1.4)，特别考虑 $P(X_1=0)=1$；$P(X_j=1)=p>0$，$P(X_j=0)=1-p\,(j>1)$ 这样的特殊情形。因为

$$\frac{\mathrm{E}N(t)}{t} = \frac{1}{t}\sum_{0\le j<t} \mathrm{E}\{N(j+1)-N(j)\}, \tag{1.11}$$

并且
$$\sum_{1}^{N(j)} X_i = j-1, \qquad \sum_{1}^{N(j+1)} X_i = j,$$

所以 $X_{N(j)+1}=0, \cdots, X_{N(j+1)}=1$。故

$$P\{N(j+1)-N(j)=k\} = (1-p)^{k-1}p.$$

因此
$$\mathrm{E}\{N(j+1)-N(j)\} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

因而由(1.11)推出

$$\frac{\mathrm{E}N(t)}{t} = \begin{cases} \dfrac{[t]-1}{tp}\text{ [1]}\ (\text{当 } t \text{ 是整数时}), \\ \dfrac{[t]}{tp}\ (\text{当 } t \text{ 不是整数时}). \end{cases} \tag{1.12}$$

故
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}N(t)}{t} = \frac{1}{p}.$$

即对所考虑的特殊情形来説，(1.4)成立。又留意 $N(j+1)-N(j)$ 与 $N(k+1)-N(k)$ 为相互独立 $(j\ne k)$，并作类似于上面的計算，使得

[1] $[t]$ 代表 t 的整数部分。—— 譯者注

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{N(t)}{t}\right)^2 = \frac{1}{p^2}. \tag{1.13}$$

对于一般情形，因为 $P(X_2=0)<1$，所以存在 $\lambda(>0)$，使得 $P(X_j\geqslant\lambda)>0$。现在定义 $\widetilde{X}_j$ 为

$$\widetilde{X}_1=0,$$

$$\widetilde{X}_j=\begin{cases}0 & (当\ X_j<\lambda),\\ 1 & (当\ X_j\geqslant\lambda),\end{cases} \quad (j\geqslant 2)$$

并令 $\widetilde{N}(t)$ 为使 $\sum_1^n \widetilde{X}_j<t$ 的那种 n 的个数，于是 $N(t)\leqslant\widetilde{N}\left(\frac{t}{\lambda}\right)$，并且 $P(\widetilde{X}_1=0)=1$; $P(\widetilde{X}_j=1)=p>0$, $P(\widetilde{X}_j=0)=1-p\quad(j>1)$。利用(1.13)可得

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{N(t)}{t}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\limsup_{t\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{\widetilde{N}(t)}{t}\right)^2 = \frac{1}{(\lambda p)^2}.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\,\frac{N(t)}{t}=\mathrm{E}\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} [1],$$

于是得到(1.4)。　　　　証毕

把在 $t=0$ 时的年龄看做随机变数，記作 X_0。又設

$$U(t)=\mathrm{E}N(t). \tag{1.14}$$

$U(t)$ 的形状可由 X_0 的分布与寿命的分布函数 $F(t)$ 来表达。

令 $\Phi_0(x)$ 为个体在 $t=0$ 时的年龄分布，亦即为 X_0 的分布函数，则由(1.1)推出 X_1 的分布函数是

---

[1] 一般地說，对有界测度的情形，若 $\int|f(t,\omega)|^2m(d\omega)<K$（常数），则 $\lim_{t\to\infty}\int f(t,\omega)m(d\omega)=\int\lim_{t\to\infty}f(t,\omega)m(d\omega)$。因为在 E 上令 $f(t,\omega)\to f(\omega)$（一致地），并令 $mE^c<\eta^2$（E^c 是 E 的余集），便有

$$\begin{aligned}\int|f(t,\omega)-f(\omega)|\,m(d\omega)&=\int_E+\int_{E^c}\\&=o(1)+\left(\int_{E^c}m(d\omega)\right)^{\frac12}\left(\int_{E^c}|f(t,\omega)-f(\omega)|^2m(d\omega)\right)^{\frac12}\\&=o(1)+\left(\int_{E^c}m(d\omega)\right)^{\frac12}O(1)=o(1)+O(\eta).\end{aligned}$$

$$\Phi_1(x)=\int_0^\infty F_y(x)d\Phi_0(y)=\int_0^\infty \frac{F(x+y)-F(y)}{1-F(y)}d\Phi_0(y). \quad (1.15)$$

因为 $N(t)$ 是使 $X_1+\cdots+X_n<t$ 的最大的 n，所以

$$U(t)=\mathrm{E}N(t)=\sum_{n=1}^\infty P(N(t)\geqslant n)$$
$$=\sum_{n=1}^\infty P(S_n<t), \qquad S_n=X_1+\cdots+X_n.$$

因为 S_n 的分布函数是 $\Phi_1*\underbrace{F*\cdots*F}_{n-1}$，所以

$$U(t)=\sum_{n=1}^\infty P(S_n<t)=\Phi_1+\Phi_1*F+\Phi_1*F*F+\cdots, \quad (1.16)$$

此处

$$\Phi_1*F=\int_0^\infty \Phi_1(t-u)dF(u),\ \Phi_1*F*F=(\Phi_1*F)*F,\ \cdots.$$

因为 $U(t)$ 存在，所以(1.16)的級数收敛。

§2 年龄分布

考虑上节定义的年龄过程 $X(t)$。

定理2.1❶ 若 $0<m=\mathrm{E}X_2<\infty$，则

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=0\right)=1. \quad (2.1)$$

又若 $\mathrm{E}X(0)=\mathrm{E}X_0=\int_0^\infty x d\Phi_0(x)<\infty$（上节），则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}X(t)}{t}=0. \quad (2.2)$$

証明 使用上节相同的記号。令 $S_n=\sum_1^n X_\nu$，于是当 $N(t)\geqslant 1$ 时，

$$X(t)=t-S_{N(t)}.$$

故

---

❶ J. L. Doob [1].

$$\frac{X(t)}{t}=1-\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\cdot\frac{N(t)}{t}. \tag{2.3}$$

因为概率为1地有 $N(t)\to\infty$，所以由强大数法则推出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_2+\cdots+X_n}{n-1}=m.$$

又由定理1.1，$P\left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{m}\right)=1$，因此由(2.3)推出

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=0\right)=1.$$

其次，因为 $X(t)\leqslant t+X_0$，所以

$$0\leqslant\frac{X(t)}{t}\leqslant 1+\frac{X_0}{t}\leqslant 1+X_0\quad(t\geqslant 1),$$

从而 $\mathrm{E}\frac{X(t)}{t}\leqslant 1+\mathrm{E}X_0$。故

$$\lim_{t\to 0}\mathrm{E}\frac{X(t)}{t}=\mathrm{E}\left(\lim_{t\to 0}\frac{X(t)}{t}\right)=0.$$ 証毕

下列定理表明，在 t 的年龄 $X(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的分布情况。

定理2.2 令 $F(+0)<1$。若

$$\int_0^\infty x^2dF(x)<\infty, \tag{2.4}$$

则

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds=\frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2dF(x)\right)=1, \tag{2.5}$$

此处 m 如上节一样表示 $\mathrm{E}X_1$。

証明 使用上节的記号。令 $S_n=X_1+\cdots+X_n$，于是当 $N(t)\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds&=\frac{1}{t}\int_0^{X_1}(X_0+s)ds+\frac{1}{t}\int_{X_1}^{X_1+X_2}(s-X_1)ds+\cdots\\&\quad+\frac{1}{t}\int_{S_{N(t)}}^t(s-S_{N(t)})ds\\&=\frac{1}{t}X_0X_1+\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{N(t)}X_j^2+\frac{(t-S_{N(t)})^2}{2t}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

上式右边第一項概率为 1 地收斂于 0（当 $t\to\infty$），第二項可以改写为

$$\frac{N(t)}{2t}\cdot\frac{1}{N(t)}\sum_{j=1}^{N(t)}X_j^2 .$$

由 (1.3) 可知概率为 1 地有 $\frac{N(t)}{t}\to\frac{1}{m}$，从而由强大数法则推出（留意 (2.4) 蘊涵 $m<\infty$）

$$P\left(\frac{1}{N(t)}\sum_{1}^{N(t)}X_j^2\to \mathrm{E}X_2^2\right)=1 .$$

由于 $\mathrm{E}X_2^2=\int_0^\infty x^2dF(x)$，所以 (2.6) 右边第二項概率为 1 地收斂于 $\frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2dF(x)$，(2.6) 右边最后一項不超过 $X^2_{N(t)+1}/2t$。又因

$$\frac{X^2_{N(t)+1}}{2t}=\frac{X^2_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{2t},$$

并且 $\{N(t)+1\}/2t\to 1/2m$，所以最后一項概率为 1 地收斂于 0。于是証明了 (2.5)。 証毕

由此可知，随着时間 t 增大，在 0 到 t 内平均的年龄趋于 $\frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2dF(x)$。下面我們将考察当 $t\to\infty$ 时 $P(X(t)\geqslant\lambda)$ 的分布情况。首先，$X(t)$ 是 Марков 过程❶。这就是說，知道 $X(t_1)=x$ 时，則 $X(t_1+s)\geqslant\lambda$ 的概率不依賴于 $X(t)$ 在 t_1 以前的值。并且轉移概率 $P(X(t+s)\geqslant\lambda\,|\,X(t)=x)$ 只依賴于 s 而不依賴于 t。具体地計算之便得

$$P(X(t+s)\geqslant\lambda\,|\,X(t)=x)$$

$$=\begin{cases}0 & (s+x<\lambda),\\ \dfrac{1-F(x+s)}{1-F(x)} & (s<\lambda\leqslant s+x),\\ \dfrac{1-F(x+s)}{1-F(x)}+\displaystyle\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}dU_x(u) & (\lambda\leqslant s),\end{cases} \tag{2.7}$$

❶ 見本书第 6 章 §26。更进一步的討論，可参看本丛书中刘璋温譯《随机过程》第 4 章。——譯者注

此处 $U_x(t)$ 表示 $N(t)$ 在 $X(0)=x$ 时的数学期望。(2.7) 的前二式显然成立，最后一式是这样求得的：

$\{1-F(x+s)\}/\{1-F(x)\}$ 是已經活到 x 岁后，再继續活 s 岁以上的概率。而欲求的概率(当 $\lambda<s$)是上述这个概率与下述另一概率的和。另一概率是，到 t 与 $t+s$ 之間的时刻 $t+u$ 为止，重复若多少次死亡与出生之后 (u 小于 $s-\lambda$)，最后于 $t+u$ 时刻誕生，而以后再继續活 $s-u$ 这么多时間的概率。这个最后的概率显然是

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}dP(X_1+X_2+\cdots+X_\nu<u).$$

它等于

$$\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}\,d\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}P(X_1+\cdots+X_\nu<u)\right\}$$
$$=\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}dU_x(u).$$

于是得到 (2.7) 中的最后一式。

这表明，我們的随机过程是以 (2.7) 为轉移概率的 Марков 过程。

§3 积分方程与平均數数

沿用前二节的記号。从 (1.16) 我們有

$$U(t)=\Phi_1+\Phi_1*F+\Phi_1*F*F+\cdots$$
$$=\Phi_1(t)+\int_0^t\Phi_1(t-s)dF(s)+\int_0^t\Phi_1*F(t-s)dF(s)+\cdots.$$

上式可以写成

$$U(t)=\Phi_1(t)+\int_0^t U(t-s)dF(s). \tag{3.1}$$

特别，若 $X_0=0$，則 X_1 的分布与 $X_2, X_3, \cdots$ 相同，即 $\Phi_1(x)=F(x)$，故 (3.1) 变成

$$U(t)=F(t)+\int_0^t U(t-s)dF(s). \tag{3.2}$$

設 $F(x)$ 为絕对連續，并令 $F(x)=\int_0^x f(y)dy$。因为絕对連續函数与任意函数的卷积仍是絕对連續的，所以 (3.2) 右边第二項为絕对連續，从而左边的 $U(t)$ 也为絕对連續。故存在 $u(t)$ 使 $U(t)=\int_0^t u(y)dy$，并且

$$u(t)=f(t)+\int_0^t u(t-s)f(s)ds. \tag{3.3}$$

因此可以利用形如(3.1)的积分方程来研究 $U(t)$ 的性质。W. Feller[1]首先用这种方法来研究 $U(t)$，后来 S. Täcklind[1],[2]导出了 $U(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的更精确的漸近公式。考慮

$$U(t+h)-U(t)=\xi(t). \tag{3.4}$$

J. L. Doob[1] 和 D. Blackwell[1] 証明了 $\xi(t)\to\frac{h}{m}$，$m=\int_0^\infty xdF(x)$ (假設 >0)。后来許多人推广了这个結果。例如 K. L. Chung (钟开莱)-H. Pollard[1] 和 G. Maruyama (丸山儀四郎)[1] 把它推广为 X_i 是取值于$(-\infty,\infty)$而且具有相同分布的随机变数的場合。

令 $X_1, X_2, \cdots$ 为遵循相同分布的随机变数，并設

$$S_n=\sum_{i=1}^n X_i.$$

于是

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^\infty P(t<S_n\leqslant t+h).$$

右边无非是使 S_n 落于$(t, t+h]$ 内的 n 的个数的平均值。

如前面一样，令 $X_i(i=1, 2, \cdots)$ 的分布函数为 $F(x)$，則和上述情形同样，$\xi(t)$ 滿足

$$\xi(t)=\int_0^t \xi(t-s)dF(s)+\int_t^{t+h}dF(s). \tag{3.5}$$

令

$$\int_t^{t+h}dF(s)=g(t),$$

上式便可写成

$$\xi(t)-\int_0^t \xi(t-s)dF(s)=g(t). \tag{3.6}$$

§4　更新积分方程

把(3.6)化为更一般的形式，令

$$\xi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-s)dF(s)=g(t) \tag{4.1}$$

为給定的方程，此处假設 $F(t)$ 和 $g(t)$ 为已知函数，$\xi(t)$ 为未知函数。我們暂时不管概率論的意义，而去研究这个方程的解的性质和解的存在性❶。

在(3.6)中 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty$，$\int_{-\infty}^{\infty}dF(s)=1$，所以在下面都假設

$$\int_{-\infty}^{\infty}dF(t)=1, \qquad F(t)\text{是非降函数。} \tag{4.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty, \qquad g(t)\text{有界。} \tag{4.3}$$

再假設

$$F(t)\text{不是格子型的分布函数。} \tag{4.4}$$

此处所謂格子型的分布函数，指的是这样的分布函数：对某些 $a(>0)$ 和 b，除 $t=na+b\,(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$ 以外，$F(t)=$常数。更假設

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|dF(t)<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}tdF(t)=m>0. \tag{4.5}$$

为了討論积分方程(4.1)的解，先作一些准备。設

$$\sigma(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \qquad \phi_0(h)=\int_{-\infty}^{\infty}dh(t), \tag{4.6}$$

此处令 $h(t)$ 为任意的有界变分函数。令 T 为对 $h(t)$ 定义的算子，即：

---

❶ 下述方法应归于 S. Karlin[1]。

$$(Th)(t)=Th=\phi_0(h)*\sigma-\sigma*h. \tag{4.7}$$

亦即对 $t\geq 0$,

$$\begin{aligned}(Th)(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}dh(s)\cdot\sigma(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-s)dh(s)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dh(t)-\int_{-\infty}^{t}dh(s)\\&=\int_{t}^{\infty}dh(s).\end{aligned} \tag{4.8}$$

对 $t<0$,

$$(Th)(t)=-\int_{-\infty}^{t}dh(s). \tag{4.9}$$

假設已存在满足(4.1)的有界的 $\xi(t)$. 又令

$$\xi_n(t)=n\int_{t}^{t+\frac{1}{n}}\xi(s)ds,\quad g_n(t)=n\int_{t}^{t+\frac{1}{n}}g(s)ds.$$

于是对 t 在 $(t,t+1/n)$ 上求(4.1)的两边的积分,然后乘上 n 便得

$$\xi_n(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n(t-s)dF(s)=g_n(t). \tag{4.10}$$

(4.10)又可写成

$$\begin{aligned}\xi_n(t)&+\left[\int_{+0}^{\infty}\xi_n(t-s)d\left(\int_{s}^{\infty}dF(v)\right)-\int_{-\infty}^{-0}\xi_n(t-s)d\left(\int_{-\infty}^{s}dF(v)\right)\right.\\&\left.+\int_{-0}^{+0}\xi_n(t-s)dTF(s)\right]-\int_{-0}^{+0}\xi_n(t-s)dF(s)\\&-\int_{-0}^{+0}\xi_n(t-s)dTF(s)=g_n(t).\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}\xi_n(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n(t-s)dTF(s)-[\xi_n(t)\{F(+0)-F(-0)\}&\\+\xi_n(t)\{1-F(+0)+F(-0)\}]=g_n(t).&\end{aligned}$$

故得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n(t-s)dTF(s)=g_n(t).$$

对此进行分部积分,由于 $TF(+\infty)=TF(-\infty)=0$, 以及 $\xi_n(t)$ 的有界性,便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n'(t-s)TF(s)ds=g_n(t)\text{。}\tag{4.11}$$

由假定有$\int_{-\infty}^{\infty}|s|dF(s)<\infty$，而这等价于$\int_{-\infty}^{\infty}|TF(s)|ds<\infty$。又因$\xi_n'(t)$对几乎所有的$t$为有界，所以(4.11)左边的积分存在。从$a$到$t$积分(4.11)的两边，便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\xi_n(t-s)-\xi_n(a-s)\}TF(s)ds=\int_a^t g_n(s)ds\text{。}$$

令$n\to\infty$，因为$\xi_n(s)$和$g_n(s)$分别在几乎所有的点上一致地收敛于$\xi(s)$和$g(s)$，故得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\xi(t-s)-\xi(a-s)\}TF(s)ds=\int_a^t g(s)ds,\tag{4.12}$$

而此式对几乎所有的t和a成立。又因左边是连續的，故上式对所有的t和a成立。因为上式右边当$t\to\infty$，$a\to\infty$或者$a\to-\infty$，$t\to-\infty$时收斂于0，所以当$|t|\to\infty$时$\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)TF(s)ds$的极限存在。令

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)TF(s)ds=c\text{。}\tag{4.13}$$

現在用$\xi_1(t)=\xi(t)-\frac{c}{m}$代替$\xi$，不难看出

$$\int_{-\infty}^{\infty}TF(s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}sdF(s)=m,$$

因而

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1(t-s)TF(s)ds=0\text{。}$$

所以若$\xi(t)$是(4.1)的解，則$\xi_1(t)$也是(4.1)的解。这样，在(4.12)中令ξ_1代替ξ，并令$a\to-\infty$，便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1(t-s)TF(s)ds=\int_{-\infty}^{t}g(s)ds\text{。}\tag{4.14}$$

利用由(4.6)所定义的ϕ_0，令$g_1(t)=\int_{-\infty}^{t}g(s)ds$，又令

$$\eta(t)=\xi_1(t)-\frac{\phi_0(g_1)}{m}\sigma(t),\tag{4.15}$$

则

$$\eta * TF ❶ = \xi_1 * TF - \frac{\phi_0(g_1)}{m} \sigma * TF$$

$$= \int_{-\infty}^{t} dg_1(s) - \frac{\phi_0(g_1)}{m} \sigma * TF$$

$$= \sigma * g_1 - \frac{\phi_0(g_1)}{m} \sigma * TF$$

(由 (4.7))

$$= -Tg_1 + \phi_0(g_1)\sigma - \frac{\phi_0(g_1)}{m} \sigma * TF$$

$$= -Tg_1 + \frac{\phi_0(g_1)}{m}(m \cdot \sigma - \sigma * TF)$$

$$= -Tg_1 + \frac{\phi_0(g_1)}{m} T\left(\int_{-\infty}^{t} TF(s)\,ds\right). \tag{4.16}$$

若已知 $\xi_1(t)$，则由 (4.15) 可以求 $\eta(t)$，又若已知 $\eta(t)$，则也可求 $\xi_1(t)$。(4.16) 右边是已知函数，因此必须留意 $\eta * TF$ 是已知的。

再作进一步的准备。仍然假設 (4.2) ~ (4.5)。

引理 4.1 $TF(t)$ 的 Fourier 变换到处不为 0。

証明 如前面所述，$TF(t) \in L_1(-\infty, \infty)$。往証

$$(TF)^*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} TF(t)\,dt \tag{4.17}$$

对所有的 θ 不为 0。

$$i\theta(TF)^*(\theta) = i\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} TF(t)\,dt$$

$$= \left[e^{it\theta} TF(t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dTF(t)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dTF(t) = -1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dF(t).$$

若上式在某个 $\theta \neq 0$ 上为 0，则如众所周知的那样，$F(t)$ 的增加点是 t 等于 $2\pi/\theta$ 的整数倍的那些值。这与假設 (4.4) 矛盾。因此

---

❶ 这个*意味着 $f*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s)\,ds$。

$(TF)^*(\theta)$在$\theta\neq0$上不能为0。又当$\theta=0$时

$$(TF)^*(0)=\int_{-\infty}^{\infty}TF(t)dt=m>0.$$

引理 4.2 令$v(t)$为有界函数，並設$f(t)\in L_1$而且$f(t)$的Fourier 变换$f^*(\theta)$对所有的θ不为0。若$v*f\equiv0$❶，則对L_1中的任意函数$g(t)$

$$v*g\equiv0.$$

証明 此引理由下述 N. Wiener 定理立刻得証：$f^*(\theta)\neq0$（对所有的θ）是$f(t)$在L_1为封閉的充要条件。这就是說，对L_1的任意函数g和任意的$\varepsilon>0$，可找到适当的常数a_i, $b_i(i=1,2,\cdots,N)$，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(t)-\sum_1^N a_i f(t+b_i)\right|dt<\varepsilon,$$

我們有

$$\begin{aligned}|v*g|&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(s)g(t-s)ds\right|\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|v(s)|\left|g(t-s)-\sum a_i f(t-s+b_i)\right|ds\\&\quad+\sum|a_i|\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(s)f(t-s+b_i)ds\right|.\end{aligned}$$

由假定，上式右边第二项等于0。因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(s)g(t-s)ds\right|&\leqslant V\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(u)-\sum a_i f(u+b_i)\right|du\\&\leqslant\varepsilon V,\end{aligned}$$

此处$V\geqslant|v(s)|$。因为ε是任意的，所以

$$v*g=0.$$

作了上述的准备后，我們来討論(4.1)的解。

定理 4.1 若(4.1)有两个有界的解，則它們只差一个常数。

証明 令$\xi_1(t)$与$\xi_2(t)$为(4.1)的两个有界的解。于是

❶ 参看15页的注。

$\xi(t)=\xi_1(t)-\xi_2(t)$ 也为有界，并且满足

$$\xi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dF(s)=0.$$

如求(4.13)那样，从此得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)TF(s)ds=c_1 \quad (c_1\text{ 是常数}).$$

令 $\xi^*(t)=\xi(t)-\frac{c_1}{m}$，便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^*(t-s)TF(s)ds=0.$$

亦即 $\xi^* * TF=0$。由引理 4.1，$TF\in L_1$ 的 Fourier 变换不为 0，因而由引理 4.2 推知，对 L_1 的任意函数 $v(t)$，$\xi^* * v=0$。特别，若令 $v(s)=1$（在 $(t-b,\ t-a)$ 上），$v(s)=0$（其他）$(b>a)$，则

$$\int_a^b \xi^*(t)dt=0.$$

因为 a, b 是任意的，所以几乎处处 $\xi^*(t)=0$。又因 $\xi(t)$ 为連続，所以 $\xi(t)=\frac{c_1}{m}$。

定理 4.2 令 $\xi(t)$ 为 (4.1) 的有界的解，并設 $F=F_1+F_2$，此处 F_1 为絕对連続，F_2 的总变差 λ 小于 1。若 $\lim\limits_{|t|\to\infty} g(t)=0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to-\infty}\xi(t)$ 存在。若 $\lim\limits_{t\to-\infty}\xi(t)=0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=\phi_0(g_1)/m$。

証明 由 $\xi(t)$ 作 $\xi_1(t)$，并如(4.15)那样，考虑

$$\eta(t)=\xi_1(t)-\frac{\phi_0(g_1)}{m}\sigma(t) \qquad \left(g_1(t)=\int_{-\infty}^{t}g(s)ds\right).$$

于是

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-s)TF(s)ds=0. \tag{4.18}$$

因为由(4.16)，$\eta * TF$ 等于 $-Tg_1+\frac{\phi_0(g_1)}{m}T\left(\int_{-\infty}^{t}TF(s)ds\right)$，并从(4.8)和(4.9)可知 $Tg_1\to 0\ (|t|\to\infty)$，$T\left(\int_{-\infty}^{t}TF(s)ds\right)\to 0\ (|t|\to$

∞)，所以 $\eta * TF \to 0$。这就得到了 (4.18)。因为 (4.18) 成立，所以对 L_1 的任意函数 $v(t)$，可得

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-s) v(s) ds = 0. \tag{4.19}$$

而此式从証明引理 4.2 时用到的 Wiener 定理立刻看出。在(4.19)中适当地选择 $v(s)$，便得

$$\int_t^{t+\xi} \eta(u)\, du \to 0 \quad (t\to\infty). \tag{4.20}$$

现在，假設已經得到

$$\lim_{|t|\to\infty,\ u\to 0} |\eta(t+u) - \eta(t)| = 0. \tag{4.21}$$

于是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 T, δ，使得当 $t>T$ 及 $|u|<\delta$ 时，有

$$|\eta(t+u) - \eta(t)| < \varepsilon. \tag{4.22}$$

所以当 $t>T$, $0<|\xi|<\delta$ 时，便得

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} \{\eta(t+u) - \eta(t)\} du\right| < \varepsilon.$$

取 ξ 使 $0<|\xi|<\delta$，并令 $t\to\infty$，則由 (4.20) 推出

$$\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} \eta(t+u)\, du \to 0.$$ 故由上式推出

$$\limsup_{t\to\infty} |\eta(t)| \leqslant \varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$。同样得到 $\lim\limits_{t\to-\infty} \eta(t) = 0$。于是

$$\lim_{t\to\infty} \xi_1(t) = \frac{\phi_0(g_1)}{m}, \quad \lim_{t\to-\infty} \xi_1(t) = 0. \tag{4.23}$$

但从 $\xi_1(t)$ 的构造看出，$\xi_1(t) = \xi(t) - \frac{c}{m}$，因而 $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t)$ 存在。若 $\xi(t)\to 0 \quad (t\to-\infty)$，則 $c=0$。故从 (4.23) 的左边得出

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \frac{\phi_0(g_1)}{m},$$

这就是我們定理的結論。因此若能驗証 (4.21) 成立，則証明完毕。

从(4.1)

$$\xi(t)=g(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dF(s)$$
$$=g(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dF_1(s)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dF_2(s)$$
$$=g(t)+\xi*F_1(t)+\xi*F_2(t). \tag{4.24}$$

把(4.24)最后一行代入第二行的ξ,便得

$$\xi(t)=g(t)+\Big[\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)dF_1(s)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi*F_1(t-s)dF_1(s)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\xi*F_2(t-s)dF_1(s)\Big]+\Big[\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)dF_2(s)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\xi*F_1(t-s)dF_2(s)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi*F_2(t-s)dF_2(s)\Big]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)dK_1(s)+\xi*F_1*F_1(t)+\xi*F_2*F_1(t)$$
$$+\xi*F_1*F_2(t)+\xi*F_2*F_2(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)dK_1(s)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dK_2(s)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dK_3(s),$$

此处 $K_1(t)=\sigma(t)+F_1(t)+F_2(t)$, $K_2=F_1*F_1+2\cdot F_2*F_1$, $K_3=F_2*F_2$, 而且 K_2 为絕对連續。再把(4.24)的右边代入上式右边的ξ. 重复这种操作 $n-3$ 次,便得

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)dK_{1n}(s)+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dK_{2n}(s)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)dK_{3n}(s), \tag{4.25}$$

此处 $K_{1n}(s)$ 是有界变分函数, $K_{2n}(s)$ 为絕对連續, $K_{3n}(s)$ 是 $\underbrace{F_2*F_2*\cdots*F_2}_{n}$.

因为 $g(t)\to 0\ (|t|\to\infty)$, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)dK_{1n}(s)\to 0\quad(|t|\to\infty). \tag{4.26}$$

又因 $F_2(t)$ 为非降函数，并且不失普遍性可以假設 $F(-\infty)=F_1(-\infty)=F_2(-\infty)=0$，所以 $F_2(x)\leqslant\lambda$，故

$$F_2*F_2\leqslant\lambda\int_{-\infty}^{\infty}dF_2(s)\leqslant\lambda^2,$$

因而 F_2*F_2 的总变差不大于 λ^2。同样 K_{3n} 的总变差也不超过 λ^n。于是

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)\,dK_{3n}(s)\right|\leqslant c_1\int_{-\infty}^{\infty}dK_{3n}(s)\leqslant c_1\lambda^n, \qquad (4.27)$$

此处 $c_1=\sup|\xi(s)|$。又

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t+u-s)\,dK_{2n}(s)-\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)\,dK_{2n}(s)\right|\\&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)K'_{2n}(s+u)\,ds-\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-s)K'_{2n}(s)\,ds\right|\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\xi(t-s)|\,|K'_{2n}(s+u)-K'_{2n}(s)|\,ds\\&\leqslant c_1\int_{-\infty}^{\infty}|K'_{2n}(s+u)-K'_{2n}(s)|\,ds.\end{aligned}$$

当 $u\to0$ 时，此式右方趋于 0。把此式及 (4.26) 与 (4.27) 代入 (4.25)，使得

$$\limsup_{|t|\to\infty,\ u\to0}|\xi(t+u)-\xi(t)|\leqslant2c_1\lambda^n.$$

由于 $0<\lambda<1$，可取 n 足够大，使得上式右边任意小。因此

$$\lim_{|t|\to\infty,\ u\to0}\{\xi(t+u)-\xi(t)\}=0.$$

由此立刻得到 $\eta(t+u)-\eta(t)\to0\quad(|t|\to\infty,\ u\to0)$。　　証毕

系 4.1 若(4.1)的有界的解 $\xi(t)$ 存在，并且(4.15)的 $\eta(t)$ 对 $t>0$, $t<0$ 为一致連續，則

$$\lim_{|t|\to\infty}\eta(t)=0.$$

証明 由于 $\eta(t)$ 滿足(4.21)，所以由定理 4.2 的証明立即得知此引理成立。

其次，我們考慮方程(4.1)的解存在的充分条件。下面令 $F(t)$ 为絕对連續，并設

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(u)\,du\,. \tag{4.28}$$

定理 4.3 令 $f(t)\in L_1,\ L_2$，并令 $g(t)$ 为有界，又設

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^2 f(t)\,dt<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|t|\,|g(t)|\,dt<\infty。$$

则(4.1)有有界的解 $\xi(t)$。

証明 令

$$h^*(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta}h(t)\,dt \text{ 或 } \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{A} e^{it\theta}h(t)\,dt$$

表示 L_1 或 L_2 的函数 $h(t)$ 的 Fourier 变换．取 g_1 同前，考虑

$$\frac{g^*(\theta)-(TF)^*(\theta)[\phi_0(g_1)-m]}{1-f^*(\theta)}。 \tag{4.29}$$

往証这是 L_2 的函数 $w(t)$ 的 Fourier 变换 $w^*(\theta)$。

由 Riemann-Lebesgue 定理知 $f^*(\theta)\to 0(|\theta|\to\infty)$，又因 $F(t)$ 为絶对連續并不是格子型，所以它的 Fourier 变换在 $\theta\neq 0$ 上小于 1．故(4.29)在 $\theta\neq 0$ 上有意义。又 $(1-f^*(\theta))^{-1}$ 在 $|\theta|\geqslant\alpha>0$ 上为有界，此处 α 是任意給定的正数。

$TF\in L_1\left(这由\int|t|f(t)\,dt<\infty\ 可以看出\right)$，并由定义知道它为有界，所以 $TF\in L_2$。因此，$(TF)^*(\theta)\in L_2$。同样 $g^*(\theta)$ 也属于 L_2。因而(4.29)在 $|\theta|\geqslant\alpha>0$ 上属于 L_2。

其次，令 $\int_{-\infty}^{t} h(t)\,dt=H(t)$，便有

$$\begin{aligned}(TH)^*(\theta)&=-\int_{-\infty}^{0} e^{i\theta t}\left(\int_{-\infty}^{t} h(u)\,du\right)dt+\int_{0}^{\infty} e^{i\theta t}\left(\int_{t}^{\infty} h(u)\,du\right)dt\\&=\frac{1}{i\theta}\left[-\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}h(t)\,dt\right]\\&=\frac{1}{i\theta}\left[-\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt+h^*(\theta)\right].\end{aligned}$$

因此

$$1-f^*(\theta)\qquad i\theta(TF)^*(\theta)。$$

又因已有$\int_{-\infty}^{t} g(u)du=g_1(t)$，所以

$$g^*(\theta)=i\theta(Tg_1)^*+\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt,$$

$$(TF)^*(\theta)[\phi_0(g_1)/m]$$
$$=\left[i\theta(T^2F)^*(\theta)+\int_{-\infty}^{\infty} TF(t)dt\right]\phi_0(g_1)/m❶.$$

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF(t)dt\phi_0(g_1)/m=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt/m$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt.$$

把上列各式代入(4.29)便得

$$\frac{-(Tg_1)^*(\theta)+(T^2F)^*(\theta)\phi_0(g_1)/m}{(TF)^*(\theta)}. \tag{4.30}$$

由$t^2f(t)\in L_1$可知$(T^2F)^*(\theta)$是θ的連續函数。同样由$tg(t)\in L_1$可知$(Tg_1)^*(\theta)$是θ的連續函数。由于$(TF)^*(0)=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt=m>0$，所以(4.30)的分母在$\theta=0$的邻域上連續并且为正。

由此可知，(4.29)是L_2的函数。令其Fourier逆变换为$w(t)(\in L_2)$，便有

$$w^*(\theta)=\frac{g^*(\theta)-(TF)^*(\theta)[\phi_0(g_1)/m]}{1-f^*(\theta)}. \tag{4.31}$$

由此推出

$$w^*(\theta)-w^*(\theta)f^*(\theta)=g^*(\theta)-(TF)^*(\theta)\frac{\phi_0(g_1)}{m}.$$

因此$w^*(\theta)f^*(\theta)$是$w*F$的Fourier变换，所以

$$w(t)-\int_{-\infty}^{\infty} w(t-s)f(s)ds=g(t)-(TF)(t)\frac{\phi_0(g_1)}{m}, \tag{4.32}$$

---

❶ $T\left(\int_{-\infty}^{t} TF(s)ds\right)$簡記为$T^2F$。

此式对几乎所有的 t 成立。由 $w\in L_2$ 和 $f\in L_2$，可知 $w*F$ 为有界而且連續。我們还可以适当地改变 $w(t)$ 在 t 的零测集上的值，使得(4.32)对所有的 t 成立。这样一来，$w(t)$ 就为有界(因为右边也为有界)。令

$$\xi(t)=w(t)+\frac{\phi_0(g_1)}{m}\sigma(t),$$

而这就是欲求的解。 証毕

§5 循环定理

我們已經看到 §3 中的 $U(t+h)-U(t)=\xi(t)$ 是下列方程的解：

$$\xi(t)-\int_0^t \xi(t-s)dF(s)=g(t), \tag{5.1}$$

此处 $g(t)=\int_t^{t+h}dF(s)$。由于 $F(x)$ 是分布函数，所以

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=0. \tag{5.2}$$

令 $F(t)=0\quad(t<0)$，則 $g(t)\to 0\quad(t\to-\infty)$ 也成立。$\xi(t)$ 显然是对 $t\geqslant 0$ 定义的，但可定义 $\xi(t)=0\quad(t<0)$。显然 $\xi(t)\geqslant 0$。

在(5.1)的場合，积分方程的界限是 $(0,t)$ 并为有限，所以在定理 4.2 中，当 $\xi(t)\geqslant 0$ 时，就不需要有界性的假定❶，而若解 $\xi(t)\geqslant 0$ 存在，則它是唯一的。而且 $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)$ 存在，它的极限值为 $\phi_0(g_1)/m$。

---

❶ 利用定理 4.2 的記号。由于 $\xi(t)\geqslant 0$，对某个常数 $c\geqslant 0$，$\eta(t)\geqslant -c$。不失普遍性假設 $\eta(t)\geqslant 0$，可知 $\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-s)TF(s)ds$ 为有界，并且存在 $a, b, A(A>0)$，使 $TF(s)>A$，$a\leqslant s\leqslant b$，由此推出 $\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-s)TF(s)ds\geqslant A\int_{t-b}^{t-a}\eta(s)ds$，于是对任意的 t，$\int_t^{t+1}\eta(s)ds$ 为有界(留意当 $s<0$ 时 $TF(s)=0$)。由于 $TF(s)$ 为絕对連續，$\sum\max\limits_{k\leqslant s\leqslant k+1}TF(s)<M$ (常数) 以及 $(TF)^*(s)\neq 0$，所以能够应用 Wiener 的 Tauber 型定理。这就是説，在这些条件下，$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-s)v(s)ds\to 0$ 对任意的 $v(\in L)$ 成立。

$$\phi_0(g_1)=\int_{-\infty}^{\infty}d\left(\int_{-\infty}^{t}g(u)du\right)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)dt$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{A}g(t)dt=\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{A}(F(t+h)-F(t))dt$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_{A}^{A+h}F(u)du=h.$$

于是 $\lim_{t\to\infty}\xi(t)=h$ ❶。

用已述的平均数 $U(t)$ 的語言来表达，我們有下列的

定理 5.1

$$\lim_{t\to\infty}\{U(t+h)-U(t)\}=\frac{h}{m}. \tag{5.3}$$

§6 随着號分不同而不同的寿命分布的場合

令 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立随机变数，并設 $X_i\geqslant 0$。如前面一样，考慮滿足下列关系的 n 的个数

$$x<X_1+X_2+\cdots+X_n\leqslant x+h, \tag{6.1}$$

但此时所討論的是 X_i 的分布依賴于 i 的場合。

例如，考慮到达貨車調車場的列車，令第 1 列車中开往某一方向的貨車数为 X_1，第 2 列車中开往同一方向的貨車数为 $X_2, \cdots$。由于到达列車的发站不同，因而由貨車調車場开往特定方向的貨車数的分布（考慮每天每天各列車中的貨車数的頻数）是不相同的，可是，这时若令一天所到达的列車数为 l，则 X_i 和 X_{i+l} 具有相同分布。当 $x=0$ 时，(6.1) 的 n 是使开往特定方向的貨車数达到 h 辆的到站列車数。

关于满足 (6.1) 的 n 的个数 N 的分布，Cox Smith [1] 討論了定理 5.1 的結論成立的条件。但是，对上述貨車例子的情形，(5.3) 不成立。因此，我們不考慮 (5.3)，亦即不考慮

---

❶ 对于 (5.1) 的 $\xi(t)$，容易証明：相应于 (4.22) 的条件是不必要的。

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(t<S_n\leqslant t+h)\to\frac{h}{m}(t\to\infty),\ S_n=\sum_{1}^{n} X_i,$$

而考虑❶

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} P(t<S_n\leqslant t+h)\,dt\to\frac{h}{m}\quad (T\to\infty). \tag{6.2}$$

定理 6.1 令 $\{X_i\}$ 为独立随机变数序列，并設 $X_i\geqslant 0$，$EX_i=m_i>0$。又令 $F_i(x)$ 为 X_i 的分布函数，并設

$$\lim_{A\to\infty}\int_A^{\infty} x\,dF_i(x)=0 \tag{6.3}$$

对 i 一致地成立。更設

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i=m>0. \tag{6.4}$$

于是(6.2)成立。

为了証明这个定理，先証下列的

引理 6.1 在定理 6.1 的假設下，令

$$\varphi_n(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,d\sigma_n(x),$$

此处 $\sigma_n(x)$ 是 $S_n=\sum_{1}^{n} X_i$ 的分布函数，于是

$$\lim_{s\to 0} s\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)=\frac{1}{m}. \tag{6.5}$$

証明 从(6.3)可以找到不依赖于 i 的常数 C_1，使得

$$\int_0^{\infty} x\,dF_i(x)<C_1.$$

現在令

$$f_i(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dF_i(x),\quad s\geqslant 0. \tag{6.6}$$

对任意給定的正数 ε，取不依赖于 i 的常数 A，使

$$\int_A^{\infty} x\,dF_i(x)<\varepsilon\quad (i=1,2,\cdots). \tag{6.7}$$

对这个 A，取 s_1 足够小，使得

❶ 參看 T. Kawata (河田龍夫) [1]。

$$|1-e^{-sA}|<\varepsilon, \quad 0\leqslant s\leqslant s_1. \tag{6.8}$$

这样一来，

$$\begin{aligned} f_i(s) &= f_i(0)+sf_i'(\theta s), \quad 0<\theta<1, \\ &= f_i(0)+sf_i'(0)+s[f_i'(\theta s)-f_i'(0)], \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} |f_i'(\theta s)-f_i'(0)| &= \left|\left(\int_A^\infty+\int_0^A\right)(e^{-\theta sx}-1)x\,dF_i(x)\right| \\ &\leqslant \int_A^\infty x\,dF_i(x)+\int_0^A(1-e^{-sA})x\,dF_i(x) \\ &< \varepsilon+\varepsilon\int_0^A x\,dF_i(x)<\varepsilon(1+C_1). \end{aligned}$$

故由(6.9)看出，若令

$$f_i(s)=1-sm_i+s\eta_i \tag{6.10}$$

$(f_i(0)=1)$，则对满足 $0\leqslant s\leqslant s_1$ 的 s，有

$$|\eta_i|<\varepsilon(1+C_1), \tag{6.11}$$

而此式对 i 一致地成立。于是令

$$\begin{aligned} \log f_i(s) &= \log(1-sm_i+s\eta_i) \\ &= -sm_i+s\eta_i-\frac{s^2}{2}(m_i-\eta_i)^2+\cdots \\ &= -sm_i-s\xi_i, \end{aligned}$$

便可取足够小的正数 s_2，使得在 $0\leqslant s\leqslant s_2$ 上，对 i 一致地有

$$|\xi_i|<\varepsilon. \tag{6.12}$$

此事实由 m_i 为一致有界性立刻推出。

现在，由于 $\varphi_n(s)$ 是 S_n 的分布的 Laplace 变换，以及 X_i 为独立，所以

$$\varphi_n(s)=\prod_{i=1}^n f_i(s)=\exp\left(-s\sum_1^n(m_i+\xi_i)\right)=e^{-sn(m+\delta_n+\zeta_n)},$$

此处令

$$\sum_{i=1}^n m_i=nm+n\delta_n, \quad \sum_{i=1}^n \xi_i=n\zeta_n.$$

由(6.4)，可以找到号数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，

$$|\delta_n|<\varepsilon.$$

又由(6.12),在 $0<s\leqslant s_0$ 上有 $|\zeta_t|<\varepsilon$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-ns(m+\delta_n+\zeta_n)),$$

$$s\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)=s\sum_{n=1}^{N_0}\varphi_n(s)+s\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\varphi_n(s)$$

$$\leqslant sN_0+s\sum_{n=N_0+1}^{\infty}e^{-ns(m-2\varepsilon)}$$

$$\leqslant sN_0+\frac{se^{-s(m-2\varepsilon)}}{1-e^{-s(m-2\varepsilon)}}.$$

因此

$$\limsup_{s\to0} s\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)\leqslant\frac{1}{m-2\varepsilon},$$

由于 ε 是任意的正数,所以

$$\limsup_{s\to0} s\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)\leqslant\frac{1}{m}. \tag{6.13}$$

另一方面

$$s\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)\geqslant s\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\varphi_n(s)$$

$$\geqslant s\sum_{n=N_0+1}^{\infty}e^{-ns(m+2\varepsilon)}$$

$$\geqslant\frac{s}{1-e^{-s(m+2\varepsilon)}}-s(N_0+1),$$

因此

$$\liminf_{s\to0} s\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)\geqslant\frac{1}{m}.$$

从上式与(6.13)立即得到(6.5)。

引理 6.2 令 $f(t)\geqslant0$, 若 $\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ 在 $s>0$ 上存在,并对某个 $\gamma>0$,

$$\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt\sim\frac{A}{s^{\gamma}}\quad(s\to0),$$

则

$$\int_0^{t}f(u)du\sim\frac{At^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}\quad(t\to\infty).$$

这是众所周知的 Laplace 变换的一个性质,証明从略。

作了以上的准备,我們来証明定理 6.1。

定理 6.1 的証明　令 $G_N(t)=\sum_{n=1}^{N}P(t<S_n\leqslant t+h)$, 并作

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}dG_N(t)=\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}d\sigma_n(t+h)-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}d\sigma_n(t)\right).$$

上式左边的积分范围实际上是 $(-h,\infty)$。这里,当 $-h<t<0$ 时,把 $G_N(t)$ 看作 $G_N(t)=\sum_{n=1}^{N}P(S_n\leqslant t+h)$。便得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}dG_N(t)&=\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{-h}^{\infty}e^{-st}d\sigma_n(t+h)-\int_{0}^{\infty}e^{-st}d\sigma_n(t)\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}(e^{sh}-1)\int_{0}^{\infty}e^{-st}d\sigma_n(t)\\&=(e^{sh}-1)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(s)。\end{aligned}\qquad(6.14)$$

同样,若令

$$H_N(t)=\sum_{n=1}^{N}P(S_n\leqslant t),$$

则

$$\int_{0}^{\infty}e^{-st}dH_N(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_{0}^{\infty}e^{-st}d\sigma_n(t)=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(s)。\qquad(6.15)$$

由分部积分得

$$\int_{0}^{\infty}e^{-st}dH_N(t)=-H_N(0)+s\int_{0}^{\infty}e^{-st}H_N(t)dt.$$

$H_N(t)$ 是单调增函数的非降序列。又从引理 6.1 的証明可知,$\sum_{1}^{\infty}\varphi_n(s)$ 收敛 $(s>0)$, 因而 $H_N(t)$ 的极限存在,即 $H_N(t)\to H(t)$, 而且 $H(t)$ 是非降函数,并有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}dH_N(t)&=s\int_{0}^{\infty}e^{-st}H(t)dt-H(0)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}dH(t),\end{aligned}\qquad(6.16)$$

此处我們假定了 $H_N(t)=0$, $t<0$。上式最后的等式是这样求得

的：从 $\int_0^\infty e^{-st} H(t)\,dt$ 的存在可以証明 $H(t)=o(e^{\varepsilon t})\ (t\to\infty)$ 成立❶，因此可利用分部积分求出最后的等式。由于

$$H(t+h)-H(t)=G(t)=\sum_{n=1}^{\infty} P(t<S_n\leqslant t+h),$$

所以利用(6.16)便得

$$s\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}G(t)\,dt=\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\,dG_N(t)$$

由(6.14)

$$=(e^{sh}-1)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s).$$

由引理 6.1 可知，上式右边当 $s\to 0$ 时收斂于 $\frac{h}{m}$，而在左边中

$$s\int_{-\infty}^{0} e^{-st}G(t)\,dt=s\int_{-h}^{0} e^{-st}G(t)\,dt\to 0 \quad (s\to 0),$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt\sim\frac{h}{ms} \quad (s\to 0).$$

于是由引理 6.2 得到

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T G(t)\,dt=\frac{h}{m}.$$

証毕

---

❶ 根据著者：Fourier 変換と Laplace 変換（本讲座第5卷），p.83（郎木丛书中锦端壮译《富里哀变换和拉普拉斯变换》，90～91页——译者注），$\int_0^t H(t)\,dt=o(e^{\varepsilon t})$，而 $H(t)$ 为单调，由此可得 $H(t)=o(e^{\varepsilon t})$。

$$H(t)\leqslant\frac{1}{t}\int_t^{2t} H(u)\,du$$

$$\leqslant\frac{1}{t}\,o(e^{2\varepsilon t}).$$

由于 ε 是任意的正数，所以 $H(t)=o(e^{\varepsilon t})$。

第2章　平稳随机过程

第3章以后，我們将討論預报問題和噪声問題。处理这些問題的随机过程，通常是平稳随机过程。平稳过程在本讲座第6卷伊藤 清著"確率过程"❶中已有討論，这里不妨作一些必要的重复，以便于下面問題的討論。平稳过程的应用，除了預报和噪声等問題以外，还是相当广泛的。

§7 平稳过程

令 $X(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 为随机过程。这就是依賴于 t 的随机变数，本来应記为 $X(t, \omega)$，这里省掉了 ω，而 ω 是概率空間的元素。

如果对 t 的任意有限集合 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，

$$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n) \tag{7.1}$$

的联合分布与

$$X(t_1+u), X(t_2+u), \cdots, X(t_n+u) \tag{7.2}$$

的联合分布相等，此处 u 为任意值，則称 $X(t)$ 为**严格平稳随机过程**，或簡称为**严格平稳过程**。

又若 $\mathrm{E}|X(t)|^2<\infty$，

$$\mathrm{E}X(t)=c \quad (c\text{是常数}), \tag{7.3}$$

而且

$$\mathrm{E}X(t+u)\overline{X}(t)=\rho(u) \tag{7.4}$$

是只依賴于 u 的函数，則称 $X(t)$ 为**寬平稳随机过程**或簡称为**寬平稳过程**。这时 $\rho(-u)=\overline{\rho(u)}$。

---

❶ 即本丛书中刘璋温譯《随机过程》。——譯者注

对严格平稳过程 $X(t)$，如果 $\mathrm{E}|X(t)|^2<\infty$，则它显然是宽平稳过程：因为 $X(t)$ 和 $X(t+u)$ 都遵循相同分布（在(7.1)和(7.2)中令 $n=1$），所以 $\mathrm{E}X(t)$ 不依赖于 t；又因 $(X(t_1), X(t_1+u))$ 的联合分布与 $(X(t_2), X(t_2+u))$ 的联合分布相等（因为后者等于 $(X(t_1+(t_2-t_1)), X(t_1+u+(t_2-t_1)))$），所以(7.4)成立。

对于 $X(t)$，$t=0, 1, 2, \cdots$，或者 $t=\cdots, -1, 0, 1, \cdots$，即对于 t 取整数值的所謂具有离散参数的随机过程，其定义与上述相同。为了区别于这种随机过程，上述的随机过程叫做具有連續参数的随机过程。

举一簡单例子。設

$$X(t)=\sin 2\pi t\alpha,\quad t=1, 2, \cdots, \tag{7.5}$$

此处 α 为遵循 $(0, 1)$ 上一致分布（矩形分布）❶ 的随机变数。

亦即

$$P(\alpha<x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ x & (0<x\leqslant 1),\\ 1 & (1<x).\end{cases} \tag{7.6}$$

于是

$$\mathrm{E}X(t)=\int_0^1 \sin 2\pi t x\,dx=-\left[\frac{\cos 2\pi t x}{2\pi t}\right]_0^1=0,$$

$$\mathrm{E}X(t)X(s)=\int_0^1 \sin 2\pi t x \sin 2\pi s x\,dx=\frac{1}{2}\delta_{s,t},$$

此处 $\delta_{s,t}=1\,(s=t)$，$\delta_{s,t}=0\,(s\neq t)$。这表明这个过程只依赖于 $s-t$。故 $X(t)$ 是宽平稳过程。

考虑具有連續参数的平稳随机过程 $X(t)$，

$$\mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}=\rho(u)$$

是只依赖于 u 的函数，而

$$\mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}/(\mathrm{E}|X(t)|^2)=r(u) \tag{7.7}$$

---

❶ 也称为均匀分布。——譯者注

叫做 $X(t)$ 的**自相关函数**。若 $\mathrm{E}|X(t)|^2=1$，则**协方差函数** $\rho(u)$ 等于 $r(u)$。若

$$\mathrm{E}|X(t+u)-X(t)|^2\to 0 \quad (u\to 0),$$

则称 $X(t)$ 在 t 上**均方連續**。若 $X(t)$ 是寬平稳过程，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|X(t+u)-X(t)|^2&=\mathrm{E}\{X(t+u)-X(t)\}\{\overline{X(t+u)}-\overline{X(t)}\}\\&=\mathrm{E}|X(t+u)|^2+\mathrm{E}|X(t)|^2\\&\quad-\mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}-\mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}\\&=2\sigma^2-\rho(u)-\overline{\rho(u)},\end{aligned}\tag{7.8}$$

此处 $\sigma^2=\mathrm{E}|X(t)|^2$ 不依賴于 t，而 $\rho(u)$ 是协方差函数，也不依賴于 t。故

在 t 的一个值上均方連續的寬平稳过程在 t 的所有的值上均方連續。(均方連續的寬平稳过程簡称为**連續寬平稳过程**)

定理7.1　寬平稳过程为均方連續的必要与充分条件是协方差函数 $\rho(u)$ 在原点 $u=0$ 处为連續。

証明　从(7.8)推出

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|X(t+u)-X(t)|^2&=2\rho(0)-\rho(u)-\overline{\rho(u)}\\&=2\Re(\rho(0)-\rho(u))。\end{aligned}$$

故若 $\rho(u)$ 在 $u=0$ 处連續，则 $X(t)$ 均方連續。又从

$$\begin{aligned}|\rho(u)-\rho(0)|&=|\mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}-\mathrm{E}X(t)\overline{X(t)}|\\&\leqslant\mathrm{E}|X(t+u)-X(t)||X(t)|\\&\leqslant(\mathrm{E}|X(t+u)-X(t)|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{E}|X(t)|^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

可以看出，对于均方連續的寬平稳过程，$\rho(u)$ 在 $u=0$ 处为連續。

証毕

对寬平稳过程，若 $\rho(u)$ 在 $u=0$ 处为連續，则 $\rho(u)$ 对所有的 u 为連續。因为

$$|\rho(u+v)-\rho(u)|=|\mathrm{E}X(u+v)\overline{X(0)}-\mathrm{E}X(u)\overline{X(0)}|$$
$$\leqslant(\mathrm{E}|X(u+v)-X(u)|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{E}|X(0)|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\rho^{\frac{1}{2}}(0)|2\Re(\rho(0)-\rho(v))|^{\frac{1}{2}}.$$

§8 正交过程

令 $X(t)$ 为具有連續参数的随机过程，并設 $\mathrm{E}|X(t)|^2<\infty$ $(-\infty<t<\infty)$。若对任意的 $s_1<t_1<s_2<t_2$ 有

$$\mathrm{E}\{X(t_2)-X(s_2)\}\{\overline{X(t_1)}-\overline{X(s_1)}\}=0, \tag{8.1}$$

則称 $X(t)$ 为**正交过程**❶。若 $X(t)$ 是正交过程，則存在有界非降函数 $F(t)$，使得

$$\mathrm{E}|X(t)-X(s)|^2=F(t)-F(s). \tag{8.2}$$

只須取任意的 t_0，并令

$$F(t)=\begin{cases}\mathrm{E}|X(t)-X(t_0)|^2 & (t\geqslant t_0),\\ -\mathrm{E}|X(t)-X(t_0)|^2 & (t<t_0)\end{cases}$$

即可。对于这样的 $F(t)$，(8.2)成立，并且 $F(t)$ 是非降函数。

当 $t'>t>t_0$ 时

$$F(t')=\mathrm{E}|X(t')-X(t_0)|^2=\mathrm{E}|X(t')-X(t)+X(t)-X(t_0)|^2$$

由(8.1)

$$=\mathrm{E}|X(t')-X(t)|^2+\mathrm{E}|X(t)-X(t_0)|^2$$
$$\geqslant\mathrm{E}|X(t)-X(t_0)|^2=F(t).$$

当 $t'>t_0>t$ 时，由定义推出

$$F(t')\geqslant 0\geqslant F(t).$$

当 $t_0\geqslant t'>t$ 时，也得同样的結果，于是 $F(t)$ 是 t 的非降函数。同样可証(8.2)成立。

---

❶ 一般称此过程为正交增量过程。——譯者注

§9 积分与譜函数

令 $X(t)$ 为連續寬平稳过程，并令 $K(t)$ 为任意有限区間内的有界变分函数。这时我們来給出下列积分的定义：

$$\int_A^B X(t)\,dK(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\,dK(t).$$

設

$$\Delta: A=t_0<t_1<\cdots<t_m=B, \tag{9.1}$$

又設

$$S_\Delta=\sum_{k=0}^{m-1} X(t_k)\,(K(t_{k+1})-K(t_k)).$$

同样对$[A, B]$的另一分割

$$\Delta': A=t'_0<t'_1<\cdots<t'_n=B$$

作相应的 $S_{\Delta'}$。令 Δ_0 为把 Δ 和 Δ' 凑在一起而形成的分割，并設它的分点为 $A=t_0^0<t_1^0<\cdots<t_N^0=B$。容易看出

$$|S_\Delta-S_{\Delta'}|^2=|S_\Delta|^2+|S_{\Delta'}|^2-S_\Delta\overline{S}_{\Delta'}-\overline{S_\Delta}S_{\Delta'},$$

$$S_\Delta\overline{S_{\Delta'}}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} X(t_j)\overline{X(t'_k)}(K(t_{j+1})-K(t_j))(\overline{K(t'_{k+1})}-\overline{K(t'_k)})$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{h=0}^{N-1} X(t_h^{0\prime})\overline{X(t_i^{0\prime\prime})}(K(t_{h+1}^0)-K(t_h^0))(\overline{K(t_{i+1}^0)}-\overline{K(t_i^0)}),$$

此处 $t_h^{0\prime}$ 是 Δ 的分点 t_l，使 $t_l\leqslant t_h^0<t_{l+1}$。对 Δ' 的分点 $t_i^{0\prime\prime}$ 也是如此。从此推出

$$\mathrm{E}S_\Delta\overline{S}_{\Delta'}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{h=0}^{N-1}\rho(t_h^{0\prime}-t_i^{0\prime\prime})(K(t_{h+1}^0)-K(t_h^0))(\overline{K(t_{i+1}^0)}-\overline{K(t_i^0)}).$$

$\rho(u-v)$ 作为 u, v 的函数是連續的，因此令 $m\to\infty$, $n\to\infty$，并进一步細分 Δ, Δ' 的分点，則上式的极限等于

$$\int_A^B\int_A^B \rho(u-v)\,dK(u)\,d\overline{K(v)}.$$

同样令 $m, n\to\infty$，并无限制地細分 Δ, Δ' 的分点，則得

$$\lim \mathrm{E}\overline{S_\Delta}S_{\Delta'}=\int_A^B\int_A^B \rho(u-v)\,dK(u)\,d\overline{K(v)}.$$

特别，令 $\Delta=\Delta'$ 便得

$$\lim \mathrm{E}|S_\Delta|^2=\int_A^B\int_A^B \rho(u-v)\,dK(u)\,d\overline{K(v)}, \tag{9.2}$$

对 $\lim \mathrm{E}|S_{\Delta'}|^2$ 也是如此。故

$$\lim \mathrm{E}|S_\Delta-S_{\Delta'}|^2=0.$$

($\lim$ 意味着 $m\to\infty$, $n\to\infty$, $\max|t_{j-1}-t_j|\to0$, $\max|t'_{k+1}-t'_k|\to0$.)
故唯一地存在 S（概率为 1 地），使得

$$\lim \mathrm{E}|S_\Delta-S|^2=0.$$

把这个 S 記为

$$S=\int_A^B X(t)\,dK(t). \tag{9.3}$$

更一般地，令 Y_a, Y 为随机变数，并把 $\mathrm{E}|Y_a-Y|^2\underset{(a\to\infty)}{\to}0$ 記为 $\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,Y_a=Y$，則可以写成

$$\mathrm{l.i.m.}\,S_\Delta=\int_A^B X(t)\,dK(t). \tag{9.4}$$

換句話說，这样做可以使右边的积分恒有意义。若

$$\underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}\int_A^B X(t)\,dK(t)$$

存在，則記这个极限为

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\,dK(t).$$

定理 9.1 令 $X(t)$ 为連續的寬平稳过程，則它的协方差函数 $\rho(u)$ 可以写成

$$\rho(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}\,dF(x), \tag{9.5}$$

此处 $F(x)$ 是非降函数，并且 $F(+\infty)-F(-\infty)=\sigma^2$ ($\sigma^2=\mathrm{E}|X(t)|^2$)。

証明 現在，令 $g(v)$ 为任意連續函数，但設 $g(u)=0$ ($|u|>A$)。

因为 $\int_{-\infty}^{t} g(u)\,du = K(t)$ 是有界变分函数,所以可以定义

$$\int_{-A}^{A} X(t)\,dK(t).$$

若作这个积分所定义的近似和 S_A,则由(9.2)推出

$$\int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A} \rho(u-v)\,dK(u)\,d\overline{K(v)} = \lim \mathrm{E}|S_A|^2 \geqslant 0.$$

故

$$\int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A} \rho(u-v)\,g(u)\,\overline{g(v)}\,du\,dv \geqslant 0.$$

因此利用关于正定函数的 Bochner 定理❶,就得到(9.5)的表达式。令 $u=0$ 便得 $F(\infty)-F(-\infty)=\rho(0)=\sigma^2$。 証毕

(9.5)里的 $F(x)$ 叫做 $X(t)$ 的譜函数。

反之,若已給任意有界非降函数 $F(x)$,则可构造以(9.5)作为协方差函数的寬平稳过程。

这就是說,令 Z 为以 $\frac{1}{\sigma^2}[F(x)-F(-\infty)]$ 为其分布函数的随机变数,此处令 $\sigma^2=F(+\infty)-F(-\infty)$。又令 Y 为与 Z 独立的随机变数,它的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & (0\leqslant y<2\pi),\\ 0 & (y<0,\ y\geqslant 2\pi).\end{cases}$$

再令

$$X(t)=\sigma e^{i(Y+Zt)}. \tag{9.6}$$

于是

$$\mathrm{E}X(t)=\sigma\mathrm{E}(e^{iY+iZt})=\sigma\mathrm{E}(e^{iY})\mathrm{E}(e^{iZt})$$
$$=\sigma\mathrm{E}(e^{iZt})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iy}\,dy=0.$$

---

❶ 本讲座中河田龍夫著:Fourier 变换と Laplace 变换,即本丛书中錢端壮譯《富里叶变换和拉普拉斯变换》。——譯者注

$$\mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}=\sigma^2\mathrm{E}(e^{i(Y+Z(t+u))}e^{-i(Y+Zt)})$$

$$=\sigma^2\mathrm{E}e^{iZu}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}dF(x).$$

这表明 $X(t)$ 是均值为 0，协方差函数为(9.5)的宽平稳过程。

§10 过滤过程

今后的討論需要由下列两个形式的积分所表达的随机过程：

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(t-s)\,d\,K(s),\tag{10.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t-s)\,dY(s),\tag{10.2}$$

此处 $K(s)$ 和 $\Phi(s)$ 是复值函数，$X(t)$ 是宽平稳过程，$Y(t)$ 是正交过程。这些积分的定义必須給出，但在此之前，在本节中略述(10.1)的意义。(10.1)叫做**过滤过程**。

在通信以及控制系統中，重要的是从混加了杂乱性的輸入信号中把必要的信号分离出来。令 $f(t)$ 为一般随着时間而变化的輸入信息，并令 $N(t)$ 为随机的杂乱的輸入。輸入信号为 $X(t)=f(t)+N(t)$，而 $N(t)$ 叫做干扰波或者噪声。我們的問題就是要从輸入信号 $X(t)$ 中把 $f(t)$ 分离出来。这种操作要利用平滑化(10.1)。因为通常 $N(t)$ 的变化要比 $f(t)$ 强烈，分离 $f(t)$ 就是相当于使信号的图形平滑化。还有一类問題，例如已知过去的值 $X(t)$ 而来預报将来的值 $X(t+s)$ $(s>0)$，这在外表上虽与上面的問題有所不同，但解决这种問題也采用与此相同的形式。

利用过滤装置或者自动控制机使輸入函数 $X(t)$ 变换，然后得到輸出函数。这时，这个装置如能完全达到目的，則有 $PX(t)=f(t)$ 或者 $PX(t)=X(t+s)$。这就是説，在数学上把控制装置或者过滤装置看做算子 P。

一般令 $X(t)$ 为輸入过程，$Y(t)$ 为輸出过程。于是有 $PX(t)=Y(t)$，而我們考慮 P 为綫性算子。实际上，带有增幅器的网絡起着綫性的作用，而且大多数自动控制机构都可以利用网絡来装备起来。

假設在时間 τ 輸入单位脉冲，而在时間 t 得到輸出 $W(t,\tau)$。这个 W 叫做**单位脉冲响应**或**加权函数**。在实际間題中有不少情形是 $W(t,\tau)=W(t-\tau)$，即 $W(t,\tau)$ 只依賴于 $t-\tau$。

令 $X(t)$ 为輸入过程。若考慮在 $(\tau,\tau+\Delta\tau)$ 中有强度为 $X(\tau)$ 的脉冲，則在这个微小区間的脉冲是 $X(\tau)\Delta\tau$，并在 t 时得到相应的輸出 $W(t,\tau)X(\tau)\Delta\tau$。設 P 为綫性，則在 t 时的輸出是由 t 以前的脉冲所产生的輸出总和 $\sum\limits_{\tau<t}W(t,\tau)X(\tau)\Delta\tau$，即

$$PX(t)=\sum W(t,\tau)X(\tau)\Delta\tau=\int_{-\infty}^{t}W(t,\tau)X(\tau)d\tau.$$

令 $W(t,\tau)=W(t-\tau)$，則上式可以形式地写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}W(t-\tau)X(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\tau)W(\tau)d\tau,$$

此处 $W(t-\tau)=0\ (\tau>t)$。上式进一步的普遍化，就变成形状 (10.1)。

§11 过濾过程的定义与引理

首先，早在§9里我們已对

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-s)dK(s) \tag{11.1}$$

下了定义。令 $X(t)$ 为寬平稳过程，并設

$$\mathrm{E}X(t)=0,\qquad \mathrm{E}X(t+u)\overline{X(t)}=\rho(u). \tag{11.2}$$

又令 $K(t)$ 为任意有限区間上的有界变分函数。若 $X(t)$ 为滿足 (11.2) 的寬平稳过程，則 $X(t-s)$ 也是具有均值为 0 的寬平稳过程，所以对任意的 t 可以定义 (11.1)。这就是說，可如 (9.3) 同样

定义

$$\int_A^B X(t-s)\,dK(s),$$

并当

$$\underset{\substack{B\to\infty\\A\to-\infty}}{\text{l.i.m.}}\int_A^B X(t-s)\,dK(s)$$

存在时，記作 $\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)\,dK(s)$。当 $K(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上为有界变分函数时，上列极限必存在。更一般地，$\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)\,dK(s)$ 存在的必要与充分条件是：設 $X(t)$ 的譜函数为 $F(x)$，存在 $k(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(x)|^2 dF(x) < \infty, \tag{11.3}$$

且使得

$$\lim_{\substack{B\to\infty\\A\to-\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_A^B e^{-ixt}dK(t)-k(x)\right|^2 dF(x)=0. \tag{11.4}$$

使 (11.3) 成立的 $k(x)$ 的函数族記为 $L_2(dF)$。$k(x)$ 对于由 dF 所成的测度而言是对几乎所有的 x 都有定义。把 (11.4) 記为

$$\underset{\substack{B\to\infty\\A\to-\infty}}{\text{l.i.m.}}\,L_2(dF)\int_A^B e^{-ixt}dK(t)=k(x). \tag{11.5}$$

于是使 (11.4) 成立的必要与充分条件，显然是当 $A, A'\to\infty$ 以及 $A, A'\to-\infty$ 时

$$\text{l.i.m.}\,L_2(dF)\int_{A'\geq|t|\geq A} e^{-ixt}dK(t)=0. \tag{11.6}$$

欲証明上述的事实，只須証明 $\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)\,dK(s)$ 存在的必要与充分条件是 (11.6) 即可。

$$\mathrm{E}\left|\int_A^{B} X(t-s)\,dK(s)\right|^2$$

$$=\mathrm{E}\left|\text{l.i.m.}\sum_{k=0}^{m-1} X(t-s_k)\{K(s_{k+1})-K(s_k)\}\right|^2.$$

此处 $A=s_0<s_1<\cdots<s_m=A'$, l.i.m. 是对 $m\to\infty$ 而言的，并且 $\max_k|s_{k+1}-s_k|\to 0$。上式等于

$$\lim \mathrm{E}\left|\sum_{k=0}^{m-1} X(t-s_k)\{K(s_{k+1})-K(s_k)\}\right|^2$$

$$=\int_A^{A'}\int_A^{A'}\rho(t-s-t+s')dK(s)d\overline{K(s')}$$

$$=\int_A^{A'}\int_A^{A'}\rho(s'-s)dK(s)d\overline{K(s')}。$$

这在証明(9.2)时已經得到。$\rho(u)$ 是 $X(t)$ 的协方差函数。上式又等于

$$\int_A^{A'}\int_A^{A'}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(s-s')x}dF(x)\right\}dK(s)d\overline{K(s')}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_A^{A'}e^{-isx}dK(s)\right|^2dF(x)。$$

故上式当 $A'\to\infty, A\to\infty$ 时收斂于0，乃是 $\mathrm{E}\left|\int_A^{A'}X(t-s)dK(s)\right|^2\to 0$ 的必要与充分条件。对于 $\int_{-A'}^{-A}$ 也是如此，于是得到欲求的結果。

从上面的証明，立即得到下述的

引理 11.1 令 $X(t)$ 为寬平稳过程，$\mathrm{E}X=0$，又令 $\rho(u)$ 为 $X(t)$ 的协方差函数，$K(t)$ 为任意有限区間上的有界变分函数。若

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(t-s)dK(s) \tag{11.7}$$

存在，則

$$\mathrm{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty}X(t-s)dK(s)\right|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(s-s')dK(s)dK(s')$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|k(x)|^2dF(x), \tag{11.8}$$

此处

$$k(x) = \underset{\substack{B\to\infty \\ A\to-\infty}}{\text{l.i.m.}}\, L_2(dF)\int_A^B e^{-ixt}\,dK(t). \tag{11.9}$$

此外更有

$$\mathrm{E}\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)\,dK(s) = 0. \tag{11.10}$$

(11.10)也容易証明。因为(11.10)的左边等于

$$\mathrm{E}\,\text{l.i.m.}\sum X(t-s_k)\{K(s_{k+1})-K(s_k)\}$$
$$=\lim\sum \mathrm{E}X(t-s_k)\cdot\{K(s_{k+1})-K(s_k)\}=0.$$

其次令 $K(t)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的有界变分函数。于是(11.7)存在。(11.9)中的 $k(x)$ 叫做 $K(t)$ 的 **Fourier–Stieltjes 变换**。考虑满足

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, L_2(dF)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\,dK_n(t) = k(x) \tag{11.11}$$

的 $k(x)$，就对过滤过程的理論研究甚为方便。往証下列的

引理 11.2 若給定 $L_2(dF)$ 的任意函数 $k(x)$，則必存在 $(-\infty, \infty)$ 上有界变分函数序列 $\{K_n(t)\}$ 滿足(11.11)。

証明 令 $\{\varepsilon_n\}$ 为收斂于 0 的任意正数列，并取 $A_n = A_n(\varepsilon_n)$ 使

$$\int_{|x|>A_n} |k(x)|^2 dF(x) < \varepsilon_n. \tag{11.12}$$

其次取阶梯函数 $k_n(x) = k_n(x, \varepsilon_n)$ $(-A_n \leqslant x \leqslant A_n)$ 使

$$\int_{-A_n}^{A_n} |k(x) - k_n(x)|^2 dF(x) < \varepsilon_n. \tag{11.13}$$

阶梯函数的不連續点可以取为 $F(x)$ 的連續点。更不失普遍性，可以找到依賴于 k（不依賴于 A_n）的正数 L 使 $|k_n(x)| \leqslant L$，因此所取的 A_n 可以使之滿足

$$L^2\int_{|x|>A_n} dF(x) < \varepsilon_n.$$

現在令 λ 为常数，a, b 为 $F(x)$ 的連續点 $(-A_n \leqslant a, b \leqslant A_n)$，

并取周期为 $2A_n$ 的函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda & (a\leqslant x\leqslant b),\\ 0 & (-A_n\leqslant x<a,\ b<x\leqslant A_n),\end{cases}$$

于是这个函数的 Fourier 級数(周期为 $2A_n$)的平均部分和 $\sigma_n(x)$ 为有界❶，并在 $(-\infty, \infty)$ 上除 $a, b \pmod{2A_n}$ 以外收斂于 $\varphi(x)$。因此对任意 $\eta>0$，取 N 足够大时就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)-\sigma_N(x)|^2dF(x)<\eta.$$

設有 l 个这样的 φ，并記之为 $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, l)$。对应于 φ_j 的 σ_N 記为 $\sigma_{jN}(x)$，令 $\eta=\frac{\varepsilon_n}{l^2}$，又令 $\sum\limits_j \varphi_j(x)=k_n^*(x)$，$\sum\limits_j \sigma_{jN}(x)=\tau_n(x)$，便有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k_n^*(x)-\tau_n(x)|^2dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum\varphi_j(x)-\sum\sigma_{jN}(x)\right|^2dF(x)$$

$$\leqslant\left[\sum_{j=1}^{l}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_j(x)-\sigma_{jN}(x)|^2dF(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\leqslant\varepsilon_n.$$

由上式以及 (11.12) 和 (11.13) 可知，选擇 φ_j 使 $k_n^*(x)=k_n(x)$，$(|x|<A_n)$，并留意 $|k_n^*(x)|\leqslant L$，于是便有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k(x)-\tau_n(x)|^2dF(x)$$

$$\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}|k(x)-k_n^*(x)|^2dF(x)+\int_{-\infty}^{\infty}|k_n^*(x)-\tau_n(x)|^2dF(x)\right)$$

$$\leqslant 2\left(2\int_{|x|\geqslant A_n}|k(x)|^2dF(x)+2\int_{|x|\geqslant A_n}|k_n^*(x)|^2dF(x)+2\varepsilon_n\right)<12\varepsilon_n.$$

---

❶ 本讲座中河田龍夫著：Fourier 变換と Laplace 变換（朗本丛书中錢端壮譯《富里哀变换和拉普拉斯变换》）。——譯者注

而且 $\tau_n(x)$ 显然可以写成 $\int_{-M}^{M} e^{-ixt}dK_n(t)$ (对适当的 $M=M(n)$),因此我們的引理得証。

§12 过滤过程的数学性质

定理 12.1 令 $K_n(t)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的有界变分函数,$k_n(t)$ 为它的 Fourier-Stieltjes 变换。若 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ L_2(dF)k_n(x)=k(x)$,则

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)dK_n(s) \tag{12.1}$$

存在,此处 $X(t)$ 是寬平稳过程。

証明

$$\mathrm{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)dK_n(s)-\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)dK_m(s)\right|^2$$
$$=\mathrm{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)d(K_n(s)-K_m(s))\right|^2,$$

由 (11.8)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|k_n(x)-k_m(x)|^2dF(x)\to 0 \quad (m,\ n\to\infty), \tag{12.2}$$

此处 $F(x)$ 是 $X(t)$ 的譜函数。 証毕

当 $k(x)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上某一有界变分函数 $K(t)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换时,記

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)dK(s)=\mathfrak{F}(X,\ k;t). \tag{12.3}$$

卽使 k 可以表为 $(-\infty, \infty)$ 上的两个有界变分函数的 Fourier-Stieltjes 变换,从 (12.2) 也可以推出,$\mathfrak{F}(X,\ k;\ t)$ 是唯一决定的。若任意取 $k(x)\in L_2(dF)$,則由上节引理 11.2 推出,存在 $\{k_n(x)\}$ 使 $k_n(x)\to k(x)$ (依 $L_2(dF)$)。而 $k_n(x)$ 是 $K_n(t)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换。于是由定理 12.1 可知,$\mathfrak{F}(X,\ k_n;\ t)$ 均方收斂。記这个极限为 $\mathfrak{F}(X,\ k;t)$。从 (12.2) 推出,卽使对

$k(x)\in L_2(dF)$ 存在二个函数序列 $\{k_n(x)\}$ 和 $\{k_n'(x)\}$ 都依 $L_2(dF)$ 收斂于 $k(x)$，但因 $\mathfrak{F}(X, k_n; t)$ 和 $\mathfrak{F}(X, k_n'; t)$ 的极限相等，所以 $\mathfrak{F}(X, k; t)$ 唯一确定(对单个的 t，概率为1地)。我們把 $\mathfrak{F}(X, k; t)$，$k\in L_2(dF)$ 叫做一般的**过濾过程**。

定理 12.2 令 $X(t)$ 为具 $\mathrm{E}X=0$ 的寛平稳过程，$F(x)$ 为它的譜函数。

(1) 若 $k(x)\in L_2(dF)$，則 $\mathfrak{F}(X, k; t)$ 也是具 $\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k; t)=0$ 的寛平稳过程。

(2) 若 $k_1(x)$，$k_2(x)\in L_2(dF)$，則

$$\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k_1; t+u)\overline{\mathfrak{F}(X, k_2; t)}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x)\overline{k_2(x)}e^{iux}\,dF(x)。\tag{12.4}$$

証明

(1) $\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k; t)=0$ 是显然的：当 $k_n(x)\to k(x)$ $(L_2(dF))$ 时，

$$\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k; t)=\mathrm{E}\,\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathfrak{F}(X, k_n; t)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k_n; t)=0。$$

$\mathfrak{F}(X, k; t)$ 是寛平稳过程，这一事实只需在(2)中令 $k_1=k_2=k$ 便可証明。因此，只須証明(2)即可。

(2) 設

$$k_{1n}(x)\to k_1(x)\quad(依\ L_2(dF)),$$
$$k_{2n}(x)\to k_2(x)\quad(依\ L_2(dF)),$$

并令 k_{1n} 和 k_{2n} 分别为 $(-\infty, \infty)$ 上有界变分函数 $K_{1n}(t)$ 和 $K_{2n}(t)$ 的 Fourier-Stieltjes 变換。于是

$$\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k_1; t+u)\overline{\mathfrak{F}(X, k_2; t)}$$
$$=\mathrm{E}\,\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathfrak{F}(X, k_{1m}; t+u)\,\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\overline{\mathfrak{F}(X, k_{2n}; t)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathrm{E}\mathfrak{F}(X, k_{1m}; t+u)\overline{\mathfrak{F}(X, k_{2n}; t)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \mathrm{E}\int_{-\infty}^{\infty} X(t+u-s)dK_{1m}(s)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{X(t-s')}\,d\overline{K_{2n}(s')}$$

(如引理11.1的証明那样)

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u-s+s')dK_{1m}(s)d\overline{K_{2n}(s')}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(u-s+s')x}dF(x)\right)dK_{1m}(s)d\overline{K_{2n}(s')}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_{1m}(x)\overline{k_{2n}(x)}e^{iux}dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,L_2(dF)k_{1m}(x)\cdot\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,L_2(dF)\overline{k_{2n}(x)}\cdot e^{iux}dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x)\overline{k_2(x)}e^{iux}dF(x).$$　証毕

系 12.1　过滤过程 $\mathfrak{F}(X,k;t)$ 的协方差函数 $\rho_{\mathfrak{F}(X,k;t)}(u)$ 等于 $\int_{-\infty}^{\infty}|k(u)|^2e^{iux}dF(u)$。又它的譜函数等于 $\int_{-\infty}^{x}|k(u)|^2dF(u)$。

§13 正交过程的积分

令 $Z(t)$ 为正交过程。对形如

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dZ(t) \tag{13.1}$$

的积分，叙述一些必要的事项。由于 $Z(t)$ 是正交过程，所以由§8可知，当 $t\geqslant s$ 时存在单調非降函数 $F(t)$，使得

$$\mathrm{E}|Z(t)-Z(s)|^2=F(t)-F(s). \tag{13.2}$$

$F(t)$ 可以不是有界的。

对某个 A，令 $f(t)$ 为在 $|t|\geqslant A$ 上取0的阶梯函数。这就是說，对 $-A=a_1<a_2<\cdots<a_n=A$，設

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<a_1),\\ c_i & (a_i\leqslant t<a_{i+1},\ i=1,\cdots,n-1),\\ 0 & (t\geqslant a_n).\end{cases}$$

这时，定义(13.1)如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dZ(t)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i[Z(a_{i+1}-0)-Z(a_i+0)], \qquad (13.3)$$

此处 c_i 可以是复数。又从 (13.2) 看出，当 $t, s>t_0$，并且 $t, s\to t_0$ 时，$\mathrm{E}|Z(t)-Z(s)|^2\to F(t_0+0)-F(t_0+0)=0$，因而 $Z(t_0+0)$ 存在(概率为1而且唯一地)，使得

$$\lim_{t\downarrow t_0}\mathrm{E}|Z(t)-Z(t_0+0)|^2=0.$$

同样 $Z(t_0-0)$ 也存在。又立刻看出，在 $F(t)$ 的連續点 t_0 上有 $Z(t_0+0)=Z(t_0-0)=Z(t_0)$。

除上面的 $f(t)$ 以外，再令 $g(t)$ 为另一阶梯函数(在 $|t|$ 充分大的点上取0的)。于是便有

$$\mathrm{E}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dZ(t)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dZ(t)}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dF(t). \qquad (13.4)$$

由(13.3)的定义可知，(13.4)的左边等于

$$\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{m-1} c_i[Z(a_{i+1}-0)-Z(a_i+0)]\sum_{j=1}^{n-1}\bar{d}_j[\overline{Z(b_{j+1}-0)}-\overline{Z(b_j+0)}]\right\}$$
$$=\mathrm{E}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1} c_i\bar{d}_j[Z(a_{i+1}-0)-Z(a_i+0)][\overline{Z(b_{j+1}-0)}-\overline{Z(b_j+0)}]\right\}, \qquad (13.5)$$

此处 $g(t)$ 为在 $\{b_j\}$ 上不連續的并在 $[b_j, b_{j+1})$ 内取值 d_j 的阶梯函数。把 $\{a_i\}$ 和 $\{b_j\}$ 湊在一起并按大小次序排成 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_N$。

一般地，令 $a<c<b<d$ 便有

$$\mathrm{E}[Z(b-0)-Z(a+0)][\overline{Z(d-0)}-\overline{Z(c+0)}]$$
$$=\lim_{\eta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{E}[Z(b-\varepsilon)-Z(a+\varepsilon)][\overline{Z(d-\eta)}-\overline{Z(c+\eta)}]$$
$$=\lim_{\eta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{E}[Z(b-\varepsilon)-Z(c+\eta)+Z(c+\eta)-Z(a+\varepsilon)]$$
$$\times[\overline{Z(d-\eta)}-\overline{Z(b-\varepsilon)}+\overline{Z(b-\varepsilon)}-\overline{Z(c+\eta)}]$$

(令 $a+\varepsilon<c<c+\eta<b-\varepsilon<b<d-\eta<d$)

$$=\lim_{\eta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{E}|Z(b-\varepsilon)-Z(c+\eta)|^2$$

(利用 Z 的正交性)

$$=F(b-0)-F(c+0).$$

由此推出，(13.5)等于

$$\sum f(\alpha_\nu)\overline{g(\alpha_\nu)}\,[F(\alpha_{\nu+1}-0)-F(\alpha_\nu+0)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\bar{g}(t)\,dF(t),$$

这就証明了(13.4)。

特别，令 $f(t)$，$g(t)$ 为在充分大的 $|t|$ 上取值为 0 的阶梯函数，便有

$$\mathrm{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dZ(t)-\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dZ(t)\right|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dF(t)-2\Re\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,dF(t)+\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dF(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|^2dF(t).\qquad(13.6)$$

其次，令 $f(t)$ 为 $L_2(dF)$ 的任意函数。于是存在阶梯函数(对大的 $|t|$ 取 0 的)，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-f_n(t)|^2dF(t)\to 0.$$

利用这个 f_n，作

$$X_n=\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)\,dZ(t),$$

则从(13.6)推出

$$\mathrm{E}|X_m-X_n|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f_m(t)-f_n(t)|^2dF(t).\qquad(13.7)$$

因为右边收斂于 0，所以左边也收斂于 0 (令 $m,n\to\infty$)，从而概率为 1 而且唯一地存在 X，使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,|X_n - X|^2 = 0. \tag{13.8}$$

这个 X 定义为

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dZ(t). \tag{13.9}$$

从(13.8)推出

$$\mathrm{E}|X|^2 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}|X_n|^2 = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2 dF(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dF(t). \tag{13.10}$$

必须注意的是，在上述的定义中，(13.9)好象与 $\{f_n\}$ 的选择有关，但其实不然。假設另有一阶梯函数序列 $\{f'_n\}$ (对大的 $|t|$ 取 0) 存在，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'_n(t) - f(t)|^2 dF(t) \to 0,$$

并作 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty} f'_n(t)\,dZ(t)$，则这也概率为 1 地等于(13.9)的 X。这可从下述事实看出：把 $\{f_n(t)\}$，$\{f'_n(t)\}$ 的函数交互地排成函数序列$\{\tilde{f}_n(t)\}$，然后对应(13.9)定义一个 X，这个X概率为 1 地既等于由 $\{f_n\}$ 所作的 X，又等于由 $\{f'_n\}$ 所作的 X。

下述事实，由于証明簡单，所以从略。

(1) 令 $f(t),\ g(t) \in L_2(dF)$，便有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{af(t) + bg(t)\}dZ(t)$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dZ(t) + b\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dZ(t). \tag{13.11}$$

(a, b 是常数)

(2) 令 $f(t),\ f_n(t) \in L_2(dF)$。

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dZ(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dZ(t) \tag{13.12}$$

的必要与充分条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)-f(t)|^2dF(t)=0。\tag{13.13}$$

(3) 令 $f(t)$, $g(t)\in L_2(dF)$, 便有

$$\mathrm{E}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dZ(t)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)dZ(t)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g}(t)dF(t)。\tag{13.14}$$

第3章　平稳随机过程及其某些应用

本章叙述平稳随机过程的若干非常簡单的应用。当以趋势的起伏为考察的着眼点时，現实的时間序列在很多場合中可以认为是平稳随机过程。在实际中，由观测以及其他方法得到的时間序列的数据，通常受到各种形式的修正，例如舍入（四舍五入）。

又在实际中，人們总是間断地观测时間为連續的时間序列。在这种場合，人們就想知道原来的时間序列是什么，或者說，人們欲从这样得到的时間序列来推断原来的真的时間序列是什么。由于平稳过程完全由它的譜函数所規定，所以只須考察譜函数經过上述操作后起什么样的变化卽可。

把輸入信号 z 改为 $|z|$ 的装置是整流器。把 $z>a$ 的 z 改为 a 和把 $z<-a$ 的 z 改为 $-a$ 的装置是限制器。对于这些装置，人們也想知道輸入过程的譜函数起什么样的变化。

剛才叙述的操作是非綫性的。本章将一般地叙述非綫性場合的問題，并且作为这个場合的一个例子，而討論舍入。假設輸入过程为正态过程，由于从来对这个情形已做了种种的研究，所以就对这个情形进行討論。

§ 14　非綫性操作的輸出相关函数❶

考虑振幅畸变过濾器。輸出 $Y(t)$ 是輸入过程 $X(t)$ 的函数

$$Y(t)=G[X(t)]。\tag{14.1}$$

这就是說，輸出是当时輸入值 $X(t)$ 的函数，而过濾器就是瞬时地作用着。$X(t)$ 取实数值，并且其統計性质是已知的正态过程。

❶ 参看 S. O. Rice [1], Laning-Battin [1], N. Wax [1].

如果对任意的时点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, $\{X(t_1), \cdots, X(t_n)\}$ 遵循 n 維正态分布，称 $X(t)$ 为实正态过程。亦卽它們的联合概率密度为

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sqrt{|\sigma^{ij}|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_j\sum_i \sigma^{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\right\}, \tag{14.2}$$

此处 (σ^{ij}) 是任意的对称正定矩陣。也就是 $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$，并对不全为 0 的任意 $u_1, \cdots, u_n$，恒有

$$\sum \sigma^{ij} u_i u_j > 0.$$

$|\sigma^{ij}|$ 是 (σ^{ij}) 的行列式。于是 $a_i = \mathrm{E}X(t_i)$，又若令 (σ_{ij}) 为 (σ^{ij}) 的逆矩陣，則

$$\sigma_{ij} = \mathrm{E}(X(t_i) - a_i)(X(t_j) - a_j).$$

卽 (σ_{ij}) 是协方差矩陣。我們在下面恒假定 $a_i = 0$。

当 $n=2$ 并且 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$ 时，概率密度可以写成

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2)}, \tag{14.3}$$

此处 $r = \dfrac{\mathrm{E}\,X(t_1)X(t_2)}{\mathrm{E}\,X^2(t_1)}$.

令 $X(t)$ 为平稳过程。由于在(14.2)中已令 $a_i = 0$，所以过程的概率密度由 σ^{ij} 决定，而 σ^{ij} 显然又由 σ_{ij} 决定。这就是說，由协方差完全决定。因此，如果我們的过程是寬平稳过程，那末由于 $\sigma_{ij} = \sigma(t_i, t_j)$ 仅由 $t_i - t_j$ 决定，所以对应于 $(t_1, \cdots, t_n)$ 的 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 与对应于 $(t_1 + u, \cdots, t_n + u)$ 的那个相等，从而我們的过程也是严格平稳的。換句話說，在正态过程中，寬平稳过程与严格平稳过程是一回事。

現在假設輸入 $X(t)$ 为实正态平稳过程，并且满足

$$\mathrm{E}\,X(t) = 0, \tag{14.4}$$

令 $F(x)$ 为 $X(t)$ 的譜函数。設(14.1)的 $G(x)$ 为滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(x)\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx < \infty \tag{14.5}$$

的实值函数。这时，由于 $\sigma^2 = \mathrm{E}\, X^2(t)$ 不依賴于 t，所以 $(X(t_1),\ X(t_2))$ 的概率密度由(14.3)給定。

求 $Y(t)$ 的协方差。

$$\mathrm{E}\, Y(t) Y(t+u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)} G(x) G(y)\, dx\, dy, \tag{14.6}$$

此处 $r = \frac{\rho(u)}{\sigma^2} = \frac{\mathrm{E}\, X(t+u) X(t)}{\mathrm{E}\, X^2(t)}$ （令 $|r|<1$）。在(14.5)的假定下(14.6)的积分是有穷的。由 Schwarz 不等式，

$$\mathrm{E}\,|Y(t+u) Y(t)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)} G^2(x)\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)} G^2(y)\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

上式最后的因子不大于下式：

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x-ry)^2} G^2(y)\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, G^2(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x-ry)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{1-r^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} G^2(y)\, dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (\text{由}(14.5)).$$

同样，中間的那个因子也是有穷的。

其次，我們有

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)h_k\left(\frac{y}{\sigma}\right)r^k e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\text{[1]},\tag{14.7}$$

此处 $h_n(x)$ 是 Hermite 多项式，即

$$h_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

故可以写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\,Y(t)Y(t+u)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sum_{k=0}^{\infty}h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)h_k\left(\frac{y}{\sigma}\right)r^k e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}G(x)G(y)\,dx\,dy\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)G(x)\,dx\right)^2 r^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)G(x)\,d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)^2 r^k=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^2r^k,\end{aligned}\tag{14.8}$$

此处

$$g_k=\int_{-\infty}^{\infty}h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)G(x)\,d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

在上面的討論中，我們假設了

$$r=\frac{\rho(u)}{\sigma^2}=\frac{1}{F(\infty)-F(-\infty)}\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,dF(x)<1.$$

但当 $r=1$ 时，(14.8) 的等式也成立。因为当 $r=1$ 时就是 $F(x)$ 对 $x\neq0$ 为常数和 $F(+0)-F(-0)=\sigma^2$ 的情形，这时

$$\mathrm{E}\,Y(t)Y(t+u)=\mathrm{E}\,Y^2(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}G^2(x)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

(由 Hermite 展开而得的 Parseval 等式)

$$=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^2.$$

---

[1] (14.7) 叫做 Mehler 公式。参看 G. Szegö, Orthogonal polynomials, p. 371. Ex. 23.

同样当 $r=-1$ 时(14.8)也成立。

现在記

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,dF(y)=F*F=F^{2*}(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^{2*}(x-y)\,dF(y)=F^{3*}(x),\cdots,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^{(n-1)*}(x-y)\,dF(y)=F^{n*}(x).$$

于是

$$\rho^n(u)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos xu\,dF(x)\right)^n=\left(2\int_0^{\infty}\cos xu\,dF(x)\right)^n \text{[1]}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos xu\,dF^{n*}(x)=2\int_0^{\infty}\cos xu\,dF^{n*}(x).$$

不失普遍性令 $F(-\infty)=0$，于是 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}g_k^2<\infty$，又 $\rho^n(0)=F^{n*}(\infty)-F^{n*}(-\infty)$，因而可以定义

$$F_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2\frac{F^{n*}(x)}{\rho^n(0)}\text{[2]},\tag{14.9}$$

这是非降函数，并且 $F_0(+\infty)-F_0(-\infty)=\sum\limits_0^{\infty}g_n^2$。又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}dF_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2\frac{1}{\rho^n(0)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}dF^{n*}(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2\frac{\rho^n(u)}{\rho^n(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2r^n.$$

从上式和(14.8)得到下列定理的(14.11)。

定理 14.1　令 $X(t)$ 为取实数值的正态平稳过程，并設

$$E\,X(t+u)\,X(t)=\rho(u),$$

---

[1] 对于取实数值的寬平稳过程，$\rho(u)=\rho(-u)$，因而 $\int_{-\infty}^{\infty}\sin xu\,dF(x)=0$，由此推出 $F(x)$ 关于 $x=0$ 对称。

[2] 設 $F^{1*}(x)=F(x)$，$F^{0*}(x)=\varepsilon(x)$，此处 $\varepsilon(x)$ 是单点分布。

于是对 $Y(t)=G[X(t)]$，有

$$\mathrm{E}Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x)h_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)=g_0, \tag{14.10}$$

$$\mathrm{E}Y(t+u)Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}dF_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2\frac{\rho^n(u)}{\rho^n(0)}, \tag{14.11}$$

此处 $F_0(x)$ 由(14.9)給定，又有

$$g_n=\int_{-\infty}^{\infty}h_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)G(x)d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \tag{14.12}$$

此处 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数，$h_n(x)$ 是 Hermite 多項式，并假設 $G(x)$ 滿足(14.5)。

(14.10)显然成立。$Y(t)$ 和 $Y(t+u)$ 的协方差是

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(Y(t)-\mathrm{E}Y(t))(Y(t+u)-\mathrm{E}Y(t+u))\\&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2\frac{\rho^n(u)}{\rho^n(0)}-\mathrm{E}^2Y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n^2\frac{\rho^n(u)}{\rho^n(0)}.\end{aligned} \tag{14.13}$$

根据这个定理，$Y(t)$ 的协方差函数可从(14.11)来計算。又从(14.13)，并留意(14.9)，便得到 $Y(t)-\mathrm{E}Y(t)$ 的譜函数为

$$F_Y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n^2\frac{F^{n*}(x)}{\rho^n(0)}. \tag{14.14}$$

§15 舍入(四舍五入)

如上节一样，令 $X(t)$ 为正态平稳过程，$F(x)$ 为它的譜函数。当 $X(t)$ 取値为 $\nu h\leqq x<(\nu+1)h$ 时，我們就取値 νh。这就是說，以 h 为单位，舍掉尾数。当 $h=1$ 时，就是舍掉小数点以下的数。

这时，令 $Y(t)$ 为經过舍入后得到的随机过程，则

$$Y(t)=G[X(t)], \tag{15.1}$$

此处

$$G(x)=\nu h\quad(\nu h\leqq x<(\nu+1)h) \tag{15.2}$$
$$(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

由(14.14)，$Y(t)-EY(t)$ 的譜函数是

$$F_Y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k^2\frac{F^{k*}(x)}{\rho^k(0)},\tag{15.3}$$

$$g_k=\int_{-\infty}^{\infty}h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)G(x)d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),\ \ \rho(0)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)。$$

令 $G(x)=x-\frac{h}{2}+\Delta_h(x)$，則一般地有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_h(x)g(x)dx=-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\left[x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right]\left[g\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)\right.$$

$$\left.+\left(x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)g'\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)+R_\nu\right]dx,$$

此处

$$R_\nu=\frac{\left(x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)^2}{2}g''(\xi)$$

$$\left(\nu h<\xi<\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h,\ \text{或者}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h<\xi<(\nu+1)h\right).$$

因此，把此代入(15.3)，便有 $\left(\text{令}\ g(x)=h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)\frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)$

$$\begin{aligned}g_k=&\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)\frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx\\&-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}g\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\left[x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right]dx\\&-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}g'\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\left[x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right]^2dx\\&+\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\left[x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right]^3\frac{1}{2}g''(\xi)dx。\end{aligned}\tag{15.4}$$

在上式右边第一項中，$h_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ 是次数不大于 k 的多項式，并与加权 $\frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ 正交，所以当 $k>1$ 时，第一項等于0。当 $k=1$ 时，

$h_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)=x$ 与常数 -1 正交，所以上式第一项当 $k=1$ 时等于 σ。因此，令 $\delta_{ik}=1\,(i=k)$，$\delta_{ik}=0\,(i\neq k)$，则上式右边第一项可以写成 $\sigma\delta_{1k}$。(15.4)的右边第二项显然等于0。若注意到

$$\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\left[x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right]^2 dx=\frac{h^3}{12},$$

则第三项等于

$$-\frac{h^3}{12}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} g'\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right).$$

最后一项等于 $o(h^3)$ $(h\to 0)$。根据以上所述，可以把(15.4)写成

$$g_k=\sigma\delta_{1k}-\frac{h^3}{12}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left[g'\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)+o(1)\right]\quad (h\to 0). \qquad (15.5)$$

$g'\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)h\right)$ 显然依赖于 k，$o(1)$ 也依赖于 k。这样得到了 g_k 的一个近似式(15.5)。

§16 离散参数的情形

当 $X(t)$ 为具有离散参数的情形，即参数 t 的变化范围为 $\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 的情形，§14 和 §15 所討論的譜函数的特殊情形的近似式已由 Grenander❶ 等人得到，所以只叙述其結果。

如第2章一样，对于离散参数的情形，也可以定义协方差函数 $\rho(u)$ $(u=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。如定理9.1那样，令 $X(t)$ 为寬平稳过程，则可把协方差函数写成

$$\rho(u)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{iux}dF(x)\quad (u=0,\pm1,\pm2,\cdots), \qquad (16.1)$$

此处 $F(x)$ 是在 $[-\pi,\pi)$ 上定义的非降函数，这个 $F(x)$ 叫做离散参数情形的譜函数。这样，到此为止的討論完全同样成立。但是，§14 中的 $F^{n*}(x)$ 的意义是：在 $[-\pi,\pi)$ 的外边周期地外延 F，并

❶ 参看 Grenander-Rosenblatt [1], p. 51～57.

且定义

$$F^{n*}(x)=\int_{-\pi}^{\pi}F^{(n-1)*}(x-y)\,dF(y).$$

(14.14)是对 n 从1到∞的求和，但計算是困难的，因此，对 F 为絶对連續的情形，考虑取 p 項近似。把(14.14)中的 $\frac{F^{n*}(x)}{\rho^n(0)}$ 看作是具有 $\frac{F(x)}{\rho(0)}$ 为分布函数的一維环形圓紋曲面 $[-\pi,\pi)$ 上的 n 个随机变数之和的分布函数，并且这些随机变数只取値于 $[-\pi,\pi)$，所以若以 mod 2π 来考虑这个和的分布，則可証明当 $n\to\infty$ 时它趋近于 $[-\pi,\pi)$ 上的一致分布。因此，(14.14)可以用下式近似：

$$F_Y(x)\doteqdot\sum_{n=1}^{p}g_n^2\frac{F^{n*}(x)}{\rho^n(0)}+\frac{x+\pi}{2\pi}\sum_{n=p+1}^{\infty}g_n^2 \tag{16.2}$$

$$=\sum_{n=1}^{p}g_n^2\left[\frac{F^{n*}(x)}{\rho^n(0)}-\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$$

$$+\frac{x+\pi}{\sigma(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}G^2(x)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx-g_0^2\frac{x+\pi}{2\pi}. \tag{16.3}$$

大多数情形取 $p=1$ 或2就足够了。

(15.5)是 $g_k(k=1,2,\cdots)$ 的近似式，但其中的 $o(h^2)$ 依賴于 k，所以不能照样代入(14.14)而得 $F_Y(x)-F(x)=o(h^2)$。于是我們就这样考虑：

由于 $X(t)$ 的概率密度是正态概率密度，所以在 ±∞ 的邻域有高度的接触，因而利用 Sheppard 修正便得

$$\mathrm{E}\,Y(t)^2-\mathrm{E}^2\,Y(t)=\mathrm{E}\,X(t)^2+\frac{h^2}{12}(1+o(1)).$$

因为上式左边是 $\int_{-\pi}^{\pi}dF_Y(x)$，所以可改写为

$$\int_{-\pi}^{\pi}dF_Y(x)=\sigma^2+\frac{h^2}{12}(1+o(1)). \tag{16.4}$$

另一方面，从(14.14)和(15.5)我們有

$$\int_{-\pi}^{\pi} dF_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 = \sigma^2 + o(h^2) + \sum_{p+1}^{\infty} g_k^2. \qquad (16.5)$$

比較(16.4)和(16.5)，便得

$$\sum_{p+1}^{\infty} g_i^2 = \frac{h^2}{12}(1+o(1)). \qquad (16.6)$$

因此，把上式代入(16.2)，便得(留意 $p=1$，(15.5))

$$F_Y(x) = F(x) + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{x+\pi}{2\pi}(1+o(1)). \qquad (16.7)$$

这就是以 h 为单位作舍入后，在均值周圍摆动的新的平稳过程的譜函数的近似式。

第4章 預 报 論

本章討論通信理論中的 A. Колмогоров 和 N. Wiener 的預报問題。对給定的輸入波应用适当的网絡，使輸出波尽可能接近于它本身的将来波形。这就是說，利用过去的波形，用尽可能小的誤差来預报将来时点上的波形。例如，經济現象的預报問題，作为問題的提法来說，是完全相同的。輸入波，在經济現象的情形是不用說的，卽是在电波的情形，也不是簡单的調和波，而是受到偶然因素的影响，例如加上干扰等等。因此，我們将假設輸入波为平稳过程（均值 0）来考虑我們的問題。在經济現象以及其他情形中，往往是均值不等于 0。这种場合的預报問題，作为非平稳过程的預报論正在发展中，但本书不去討論它❶。

卽使是对平稳过程的預报，我們也只討論給出最优裝置的理論背景。

§17 最优預报

令 $X(t)$ 为具 $EX(t)=0$ 的寬平稳过程。让我們考虑这样的問題：令 t 为現在的时点，通过已知 $X(t)$ 在过去的值，而来預报在将来时点 $t+\alpha(\alpha>0)$ 上的值 $X(t+\alpha)$。設 $X(t)$ 的譜函数 $F(x)$ 为已知。我們討論把过濾过程卽 $\mathfrak{F}(X, k; t)$ 作为預报量的情形，此处令 $k(x)\in L_2(dF)$，并且

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ L_2(dF)\,k_n(x)=k(x),\quad k_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\theta}dK_n(\theta),$$

$K_n(\theta)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的有界变分函数。这时我們有

❶ 参看例如宇田川銈久-中村文作 [1]，L. Zadeh-R. Ragazzini [1]，R. C. Davis [1]。

$$\mathfrak{F}(X, k; t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\theta)\, dK_n(\theta)。\qquad (17.1)$$

由于我們只利用 $X(t)$ 在过去的值，所以我們只考虑 $K_n(\theta)=0$ $(-\infty<\theta<0)$ 的情形，亦即只考虑它的 Fourier-Stieltjes 变换

$$k_n(x) = \int_0^{\infty} e^{-ix\theta}\, dK_n(\theta) \qquad (17.2)$$

在 $L_2(dF)$ 上的极限函数 $k(x)$。于是(17.1)变成

$$\mathfrak{F}(X, k; t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^{\infty} X(t-\theta)\, dK_n(\theta)。\qquad (17.3)$$

上式右边只依賴于 $X(s)$ $(s\leq t)$ 的值。这就是说，$\mathfrak{F}(X, k; t)$ 仅由 $X(s)$ $(s\leq t)$ 的值决定。于是，我們要决定 k 使得 $X(t+\alpha)$ 与 $\mathfrak{F}(X, k; t)$ 的差尽可能地小。考虑这个差为均方差，即

$$J(k) = \mathrm{E}|X(t+\alpha) - \mathfrak{F}(X, k; t)|^2, \qquad (17.4)$$

我們要使上式极小化。

令 $\mathfrak{K}$ 表示(17.2)中 $k_n(x)$ 的 l.i.m. $L_2(dF)$ 的极限函数族。

引理 17.1 一般地令 $k(x)\in L_2(dF)$，则

$$\mathrm{E}|X(t+\alpha) - \mathfrak{F}(X, k; t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\alpha x} - k(x)|^2\, dF(x)。\qquad (17.5)$$

証明 根据定理 12.2，

$$\mathrm{E}X(t+\alpha)\overline{\mathfrak{F}(X, k; t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha u}\overline{k(u)}\, dF(u)\ ❶,$$

利用

$$\mathrm{E}|\mathfrak{F}(X, k; t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |k(x)|^2\, dF(x)$$

便得到

$$\mathrm{E}|X(t+\alpha) - \mathfrak{F}(X, k; t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\alpha x} - k(x)|^2\, dF(x)。$$ 証毕

---

❶ $X(t+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\theta)\, dK(\theta)$，此处 $K(\theta)=0$ $(\theta<-\alpha)$，$K(\theta)=1$ $(\theta\geq-\alpha)$。又从 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\, dK(\theta) = e^{i\alpha x}$ 推出 $X(t+\alpha) = \mathfrak{F}(X, e^{i\alpha x}; t)$。

对极小化 $J(k)$ 的 $k(x)$，下列定理給出极其一般的解。

定理 17.1　令 $\alpha>0$。若有 $h(x)\in\mathfrak{L}$，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x}h(x)\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x}e^{i\alpha x}\,dF(x) \tag{17.6}$$

对所有的 $\tau>0$ 成立，則对任意的 $k(x)\in\mathfrak{L}$，有

$$J(k)\geqslant J(h). \tag{17.7}$$

这就是說，这个 $h(x)$ 就是使 $J(k)$ 为极小的那个 $k(x)$。

証明　令在 $[0,\infty)$ 上为有界变分，而在 $(-\infty,0)$ 上等于 0 的函数 $K_n(\theta)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换为 $k_n(x)$，并設

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ L_2(dF)\,k_n(x)=k(x).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\overline{k(x)}\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ L_2(dF)\,\overline{k_n(x)}\,dF(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\overline{k_n(x)}\,dF(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dF(x)\int_0^{\infty} e^{ix\theta}\,d\overline{K_n(\theta)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} d\overline{K_n(\theta)}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{ix\theta}\,dF(x)$$

由 (17.6)

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} d\overline{K_n(\theta)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha+\theta)x}\,dF(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\,dF(x)\int_0^{\infty} e^{i\theta x}\,d\overline{K_n(\theta)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\,\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ L_2(dF)\int_0^{\infty} e^{i\theta x}\,d\overline{K_n(\theta)}\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\overline{k(x)}\,dF(x).$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\overline{k(x)}\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\overline{k(x)}\,dF(x). \tag{17.8}$$

特别，令 $k(x)=h(x)$，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\overline{h(x)}\,dF(x)_{\circ} \qquad (17.9)$$

由于上式左边是实数，所以它又等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}h(x)\,dF(x)=\Re\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}h(x)\,dF(x)_{\circ} \qquad (17.10)$$

現在

$$J(k)=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{i\alpha x}-k(x)|^2dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)-2\Re\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\overline{k(x)}\,dF(x)+\int_{-\infty}^{\infty}|k(x)|^2dF(x),$$

令 $k=h$，便有

$$J(h)=\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)-2\Re\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}h(x)\,dF(x)+\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dF(x)$$

由(17.9)及(17.10)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dF(x)_{\circ}$$

故

$$J(k)-J(h)=\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dF(x)-2\Re\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\overline{k(x)}\,dF(x)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}|k(x)|^2dF(x)$$

由(17.8)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dF(x)-2\Re\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\overline{k(x)}\,dF(x)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}|k(x)|^2dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)-k(x)|^2dF(x)\geqslant 0_{\circ}$$

于是(17.7)得証。 証毕

§ 18 最优預报运算函数

我們对 $X(t)$ 的譜函数作进一步的假設。令譜函数 $F(x)$ 为絶对連續，并且

$$F'(x)=\Phi(x)\ (\geqq 0)。\tag{18.1}$$

$F(x)$ 为不連續函数的情形也并不少，但在实际問題中，对这种情形，可用絕对連續函数来近似，因此考虑譜函数为絕对連續且(18.1)成立的平稳过程的預报問題将充分地起作用。所以，从实际观点来看，(18.1)并不是太强的假設。

更假設

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log \Phi(x)|}{1+x^2}dx<\infty。\tag{18.2}$$

先叙述下面用到的函数 $\Phi(x)$ 的一些性质❶。

引理 18.1　介 $\Phi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，$\Phi(x)\geqq 0$。若(18.2)成立，則存在 $\Psi(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，使得

$$\Phi(x)=|\Psi(x)|^2。\tag{18.3}$$

而且 $\Psi(x)$ 的 Fourier 变换❷(在 L_2 上的) $\psi(t)$ 有性质：

$$\psi(t)=0\quad(t<0)。\tag{18.4}$$

又存在函数 $\Psi(x+iy)$，当 $\Im y<0$ 为正則，且在 $\Im y<0$ 的半平面上沒有零点，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x+iy)|^2dx\leqq C\quad(C\ \text{不依賴于}\ \Im y<0)$$

并且

$$\underset{y\to-0}{\text{l.i.m.}}\,\Psi(x+iy)=\Psi(x)。$$

定理 18.1　假設(18.1)和(18.2)。这时若

$$h(x)=\frac{1}{\Psi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A\psi(\alpha+t)e^{-ixt}dt\tag{18.5}$$

($\psi(t)$ 是(18.3)中的 $\Psi(x)$ 的 Fourier 变换)是 x 的函数，則 $\mathfrak{F}(X,h;t)$ 是最优預报过程。实际上，当且只当 $k(x)=h(x)$ 时(除零測

---

❶ 証明見著者：应用数学概論 II(岩波全书)，§16.4。

❷ $\psi(t)=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}e^{ixt}\Psi(x)dx$。

集以外)，$J(k)$ 为最小。这时 $J(h)$ 的值为

$$\int_0^\alpha |\psi(t)|^2 dt. \tag{18.6}$$

(18.6) $= J(h)$ 叫做**均方誤差**。

証明 根据定理 17.1，只須証明由 (18.5) 所定义的 $h(x)$ 满足 (17.6) 即可。令 $h(x) \in \mathfrak{K}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dF = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 \Phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)\Psi(x)|^2 dx,$$

所以 $h(x)\Psi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$。故由 (18.5) 推得 $h(x)\Psi(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\xi(t) = \begin{cases} \psi(t+\alpha) & (t>0), \\ 0 & (t<0). \end{cases} \tag{18.7}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} h(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} h(x) \Psi(x) \overline{\Psi(x)}\, dx$$

由 Parseval 等式并留意(18.4)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t+\tau+\alpha)\, \overline{\psi(t)}\, dt$$

再由 Parseval 等式

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau+\alpha)x} \Psi(x) \overline{\Psi(x)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau+\alpha)x} dF(x).$$

于是(17.6)得証。

最优预报运算函数❶ $h(x)$ 的唯一性(除 dF-零测集以外)，可从証明定理 17.1 时所得到的等式

$$J(k) - J(h) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - k(x)|^2 dF(x)$$

---

❶ 从运算这个术語来觀，运算函数应該是指这样的算子：把以 $h(x)$ 为 Fourier-Stieltjes 变换的那个有界变分函数 $H(l)$，即把满足 $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta} dH(\theta)$ 的 $H(\theta)$ 运用于 X 的算子，但这样的 $H(\theta)$ 不一定存在，所以我們称 $h(x)$ 本身为运算函数。

中容易看出。

其次，因为 $\Psi(x)e^{i\alpha x}$ 的 Fourier 变换是 $\psi(t+\alpha)$，并且 $h(x)\Psi(x)$ 的 Fourier 变换是(18.7)中的 $\xi(t)$，所以由 Parseval 等式，有

$$
\begin{aligned}
J(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t+\alpha) - \xi(t)|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} |\psi(t+\alpha)|^2 dt \\
&= \int_{0}^{\alpha} |\psi(t)|^2 dt
\end{aligned}
$$
❶。 証毕

§19 最优預报运算函数的例子❷

列举最优預报运算函数的例子。

(1) 考虑寬平稳过程，其譜函数 $F(x)$ 由下式給定：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{du}{1+u^2}, \tag{19.1}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{19.2}$$

这时我們有

$$\Psi(x) = \frac{1}{x-i}, \quad \overline{\Psi}(x) = \frac{1}{x+i},$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, i\, e^{-t} & (t>0), \\ 0 & (t<0), \end{cases}$$

而且

$$h(x) = (x-i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \sqrt{2\pi}\, i e^{-(\alpha+t)} e^{-ixt} dt = e^{-\alpha}.$$

这就是說，$h(x)$ 是一常数，它显然是 $L_2(dF)$ 的函数，又若令

---

❶ 上面的討論，可参看 N. Wiener [1], T. Kawata (河田龍夫) [2], J. L. Doob [2], U. Grenander-M. Rosenblatt [1], K. Karhunen [1, 2].

❷ 参看 N. Wiener [1].

$$K(\theta)=\begin{cases}0 & (\theta<0),\\ e^{-\alpha} & (\theta>0),\end{cases}$$

则可以写成 $h(x)=\int_0^\infty e^{-ix\theta}dK(\theta)$，所以 $h(x)\in\mathfrak{K}$。故最优预报值是

$$\mathfrak{F}(X,h;t)=\int_0^\infty X(t-\theta)dK(\theta)$$
$$=e^{-\alpha}X(t)。$$

这时均方誤差是 $(1-e^{-2\alpha})\pi$。

(2) 当

$$\Phi(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

时，我們有

$$\Psi(x)=\frac{1}{\left(x-\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)},$$
$$h(x)=px+q,$$

此处

$$p=i\sqrt{2}\,e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\alpha}{\sqrt{2}},\quad q=e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\alpha}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right).$$

更一般地考虑 $\Psi(x)$ 为有理函数的情形．留意引理 18.1，可知当 z 为复数时，$\Psi(z)$ 的极点不可能在下半平面上，此外显然 $\Psi(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，但极点也不在实軸上，并且分母的次数必須高于分子的次数。因此，令

$$\Psi(z)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}\frac{a_{mn}}{(z-z_n)^m},\quad \Im z_n>0, \tag{19.3}$$

我們来考虑这样的 $\Psi(z)$。这样一来，

$$\psi(t)=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}\frac{a_{mn}}{(x-z_n)^m}e^{ixt}dx$$
$$=\sqrt{2\pi}\sum_n\sum_m a_{mn}\frac{t^{m-1}e^{iz_nt}}{i^{-m}(m-1)!}\quad(t>0),$$
$$=0\qquad\qquad(t<0). \tag{19.4}$$

因为由分部积分容易得到

$$\frac{i^m}{(m-1)!}\int_0^\infty t^{m-1}e^{-i(x-z_n)t}dt=\frac{1}{(x-z_n)^m}. \qquad (19.5)$$

亦即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{m-1}e^{iz_nt}e^{-ixt}dt=\frac{i^{-m}(m-1)!}{\sqrt{2\pi}\,(x-z_n)^m}.$$

因此，由 Fourier 变换的反演公式得(右边是 L_2 的函数)

$$\frac{1}{2\pi}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}\frac{i^{-m}(m-1)!}{(x-z_n)^m}e^{ixt}dx=t^{m-1}e^{iz_nt}\quad(t>0),$$

$$=0\qquad(t<0).$$

故

$$\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^A\psi(\alpha+t)e^{-ixt}dt$$

$$=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A e^{-ixt}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}a_{mn}\frac{i^m(t+\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}e^{iz_n(t+\alpha)}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}a_{mn}\frac{e^{iz_n\alpha}i^m}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{k!\,(m-k-1)!}\alpha^{m-1-k}$$

$$\times\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A t^k e^{i(z_n-x)t}dt$$

利用(19.5)

$$=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}a_{mn}e^{iz_n\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(i\alpha)^{m-1-k}}{(m-k-1)!\,(x-z_n)^{k+1}}.$$

因此，(18.5)的 $h(x)$ 应为

$$h(x)=\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}a_{mn}e^{iz_n\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(i\alpha)^{m-1-k}}{(m-k-1)!\,(x-z_n)^{k+1}}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_n}\frac{a_{mn}}{(x-z_n)^m}}. \qquad (19.6)$$

这显然是有理函数。

一般，若令(18.5)的 $h(x)$ 为有理函数，其分母的零点位于上半平面上，并且分母的次数不低于分子的次数，则这是 $\mathfrak{R}$ 的函数。

实际上，$h(\omega)$ 可以表为$\int_0^\infty e^{-i\omega t}dK(t)$，此处 $K(t)$ 是$[0, \infty)$上的有界变分函数。

証明 $h(x)$ 显然是下半平面上的正則函数。因此，只須把 $\frac{1}{(\omega-\omega_n)^k}$ $(k\geqslant 0)$ 写成 $\int_0^\infty e^{-i\omega t}dK(t)$ 即可 $(\Im\omega_n>0)$。实际上，取 $K(t)=\int_0^t (i^k t^{k-1}e^{i\omega_n t}/(k-1)!)dt$ 即可。并且有

$$\int_0^\infty |dK(t)|=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-u_n t}dt<\infty \quad (u_n=\Im\omega_n>0).$$

§20 微分算子与最优預报

如前面一样，令 $X(t)$ 为寬平稳过程，$F(x)$ 为它的譜函数。若

$$\int_{-\infty}^\infty x^2 dF(x)<\infty, \tag{20.1}$$

則

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \frac{X(t+h)-X(t)}{h} \tag{20.2}$$

对所有的 t 概率为 1 地存在。記(20.2)为 $X'(t)$。$X'(t)$ 也是寬平稳过程，它的譜函数是 $\int_{-\infty}^x x^2 dF(x)$。

証明是簡单的。設 $X(t+h)-X(t)=\Delta_h X(t)$。

$$\mathrm{E}\left|\frac{\Delta_h X(t)}{h}-\frac{\Delta_{h'}X(t)}{h'}\right|^2 \tag{20.3}$$

$$=\frac{1}{h^2}\mathrm{E}|\Delta_h X(t)|^2-\frac{2}{hh'}\Re\,\mathrm{E}\Delta_h X(t)\overline{\Delta_{h'}X(t)}$$

$$+\frac{1}{h'^2}\mathrm{E}|\Delta_{h'}X(t)|^2. \tag{20.4}$$

但是

$$\mathrm{E}\,\Delta_h X(t)\overline{\Delta_{h'}X(t)}=\rho(h-h')-\rho(-h')-\rho(h)+\rho(0),$$

故

$$\lim_{h'\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{hh'}\mathrm{E}\Delta_h X(t)\overline{\Delta_{h'}X(t)}$$

$$=\lim_{h'\to 0}\frac{1}{h'}[\rho'(-h')-\rho'(0)]=-\rho''(0),$$

此处由 $\rho(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}dF(x)$ 和 (20.1) 便知 $\rho''(0)=-\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)$ 存在。特别，令 $h=h'$，便得

$$\mathrm{E}|\Delta_h X(t)|^2=-[\rho(h)-2\rho(0)+\rho(-h)].$$

故 $\frac{1}{h^2}\mathrm{E}|\Delta_h X(t)|^2\to-\rho''(0)$。把这些代入 (20.4)，就知 (20.3) 收斂于 0。因此 (20.2) 均方收斂。記这个极限为 $X'(t)$，便有

$$\mathrm{E}X'(t+u)\overline{X'(t)}=\mathrm{E}\left[\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{\Delta_h X(t+u)}{h}\underset{h'\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{\overline{\Delta_{h'}X(t)}}{h'}\right]$$

$$=\lim_{h'\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{hh'}\mathrm{E}\Delta_h X(t+u)\overline{\Delta_{h'}X(t)}.$$

如上面一样，也可以証明上式等于 $-\rho''(u)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{iux}dF(x)$。因此 $X'(t)$ 是寬平稳过程，它的譜函数是 $\int_{-\infty}^{x}x^2dF(x)$。

同样，得到下列的

定理 20.1 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2p}dF(x)<\infty \quad (p\text{ 是正整数}), \tag{20.5}$$

则

$$X^{(k)}(t)=\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{X^{(k-1)}(t+h)-X^{(k-1)}(t)}{h}\quad (k=1,2,\cdots,p)$$

也是寬平稳过程，它的譜函数是 $\int_{-\infty}^{x}x^{2k}dF(x)$。又 $X^{(p)}(t)$ 的协方差函数是 $(-1)^p\rho^{(2p)}(u)$，此处 $\rho(u)$ 是 $X(t)$ 的协方差函数。

还有

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,h^{-p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^{p-k}X(t+kh)=X^{(p)}(t). \tag{20.6}$$

此式可用数学归納法証明，留給讀者去証。

其次，往証 $X^{(p)}(t)$ 在 (20.5) 的条件下可以写成形状 $\mathfrak{F}(X, k; t)$。取

$$
\begin{aligned}
K_n(\theta) &= 0 && (\theta < 0),\\
&= (-n)^p \sum_{k=0}^{j} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} && \left(\frac{j}{n} \leqslant \theta < \frac{j+1}{n}\right)\\
& && (j=0, 1, \cdots, p-1),\\
&= (-n)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} && \left(\frac{p}{n} \leqslant \theta < \infty\right).
\end{aligned}
\qquad (20.7)
$$

于是

$$
\begin{aligned}
k_n(x) &= \int_0^{\infty} e^{-ix\theta} dK_n(\theta)\\
&= (-n)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} e^{-i\frac{k}{n}x}\\
&= (-n)^p \left(e^{-i\frac{x}{n}} - 1\right)^p.
\end{aligned}
$$

故 $k_n(x) \to (ix)^p$，并且 $|k_n(x)| \leqslant |x|^p$。因此 $|k_n(x) - (ix)^p|^2 \leqslant 4|x|^{2p}$。由 (20.5) 可知 $k_n(x)$，$(ix)^p$ 及它們之差属于 $L_2(dF)$，所以

$$
\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, L_2(dF)\, k_n(x) = (ix)^p.
$$

另一方面

$$
\int_0^{\infty} X(t-\theta)\, dK_n(\theta) = (-n)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X\left(t - \frac{k}{n}\right),
$$

所以由 (20.6) 推出

$$
\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^{\infty} X(t-\theta)\, dK_n(\theta) = X^{(p)}(t).
$$

因此

$$
X^{(p)}(t) = \mathfrak{F}(X, k; t), \quad k(x) = (ix)^p.
$$

到此証明完毕。

由上可知，$(ix)^p$ 相应于以 $X(t)$ 的导数 $X^{(p)}(t)$ 作为輸出的

过滤器。

現在对 $X(t)$ 的譜函数加上与 §18 相同的假設，再来考虑最优预报。假設 $F'(x)=\Phi(x)$，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\Phi(x)|}{1+x^2}dx<\infty. \tag{20.8}$$

又假設

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2p}\Phi(x)dx<\infty,\quad \Phi(x)=|\Psi(x)|^2. \tag{20.9}$$

这时，往証下列的

定理 20.2 假設 (20.8) 和 (20.9)。又一个 $x^k\Phi^{\frac{1}{2}}(x)\in L_1$ $(p\geq k\geq 1)$。若

$$r(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\Psi(x)}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A e^{-ixt}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(u)e^{iut}\Big[e^{i\alpha u}-1$$
$$-i\alpha u-\cdots-\frac{(i\alpha)^{p-1}u^{p-1}}{(p-1)!}\Big]du \tag{20.10}$$

是 $\mathfrak{L}$ 的函数，则

$$h(x)=\frac{1}{\Psi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A\psi(\alpha+t)e^{-ixt}dt \tag{20.11}$$

是最优预报值，并且这个 $h(x)$ 可以写成

$$h(x)=1+ix\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}(ix)^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha^{p-1}}{(p-1)!}(ix)^{p-1}+r(x), \tag{20.12}$$

此处 $\psi(t)$ 是 $\Psi(t)$ 的 Fourier 变换。

証明　我們有

$$|x^{2p}\Phi(x)|=|x^p\Psi(x)|^2,$$

因而根据引理 18.1 (以 $x^{2k}\Phi(x)$ $(k=0,1,2,\cdots,p)$ 代替 Φ，(18.2) 仍然成立)，$x^k\Psi(x)$ 的 Fourier 变换在負的实軸上等于 0，而且

$$\psi^{(k)}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k\Psi(x)e^{ixt}dx.$$

从假設 ($x^k\Phi^{\frac{1}{2}}(x)\in L_1$) 看出，上式右边的积分絕对收斂。

現在令

$$r(x)=h(x)-1-i\alpha x-\cdots-\frac{\alpha^{p-1}(ix)^{p-1}}{(p-1)!},$$

则此式等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Psi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A\psi(\alpha+t)e^{-ixt}dt\\&\qquad-1-i\alpha x-\cdots-\frac{\alpha^{p-1}(ix)^{p-1}}{(p-1)!}\qquad\qquad(20.13)\\&=\frac{1}{\Psi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A\Big\{\psi(t+\alpha)-\psi(t)\\&\qquad-\alpha\psi'(t)-\cdots-\frac{\alpha^{p-1}}{(p-1)!}\psi^{(p-1)}(t)\Big\}e^{-ixt}dt\\&=\frac{1}{\Psi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A e^{-ixt}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\Psi(u)e^{iu\alpha}-\Psi(u)\\&\qquad-\alpha iu\Psi(u)-\cdots-\frac{\alpha^{p-1}}{(p-1)!}(iu)^{p-1}\Psi(u)\Big\}e^{iut}du\Big]dt.\end{aligned}$$

可知 (20.10) 满足 (20.12)。

其次，若 $r(x)\in\mathfrak{K}$，則 $h(x)\in\mathfrak{K}$。因为 $(ix)^k$ 是 $\mathfrak{K}$ 的函数。因此由定理 18.1 便得到我們的定理。 証毕

定理 20.3 定理 20.2 中的 $r(x)$ 可以写成

$$\begin{aligned}r(x)=&\frac{1}{\Psi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^A e^{-ixt}dt\int_0^\alpha du_1\\&\times\int_0^{u_1}\cdots\int_0^{u_{p-1}}\psi^{(p)}(t+u_p)du_p.\qquad\qquad(20.14)\end{aligned}$$

証明 从

$$\begin{aligned}\psi(t+\alpha)=&\psi(t)+\alpha\psi'(t)+\frac{\alpha^2}{2!}\psi''(t)+\cdots+\frac{\alpha^{p-1}}{(p-1)!}\psi^{(p-1)}(t)\\&+\int_0^\alpha du_1\int_0^{u_1}\cdots\int_0^{u_{p-1}}\psi^{(p)}(t+u_p)du_p\end{aligned}$$

容易推出 (20.14)。 証毕

定理 20.2 还可以改述为下列的

定理 20.4 若定理 20.2 中的 $h(x)$ 或者 $r(x)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的函数，则 $X(t+\alpha)$ 的最优預报为

$$X(t)+\alpha X'(t)+\cdots+\frac{\alpha^{p-1}}{(p-1)!}X^{(p-1)}(t)+\mathfrak{H}(X, r; t)。\tag{20.15}$$

第5章 噪声过程

本章討論噪声的数学分析。所謂噪声，就是由真空管内的散射效应 (shot effect) 所产生的东西。我們来研究它的統計性质。在通信理論或者信息論中，通常把噪声看做正态过程来处理。下面說明这个原因。

噪声的均値和方差，很早以前已为人們所知。近来由 S. O. Rice 等人的研究，已进一步得到更加精确的統計性质。噪声过程不象 Brown 运动那样变化激烈，而是相当平滑的过程。作为通信理論来說，它的零点（假設均值为 0）分布是重要的。正如从人工发声器的实驗所知道的那样，声音的判别，与其說是較多地依賴于振幅，不如說是較多地依賴于振动波的个数，即零点的个数。不管怎么样，作为噪声的統計性质，对单位时間内零点的均值，以及相邻零点間的时間間隔的分布等等，人們都有所研究。本章沒有更多的篇幅来討論那些性质，而只說明噪声过程的基本事项。

§21 散射效应

現在让我們从随机过程的观点，来考虑在真空管电流輸出中所出現的电压起伏的問題，即噪声的問題。

如果把电子从阴极跳到阳极看做脉冲，那末脉冲的发生在时間上是完全随机的。这个脉冲对电流的反应产生后效。我們假設在任意时刻上的反应，等于該时刻以前所发生的脉冲的后效的算术和。

假設电压的变化过程可由上述的构造来表示，然后从概率观点来研究这个过程的性质。

令 $W(t,\tau)$ 表示在时刻 τ 发生的单位强度脉冲的反应在以后的时刻 t 上的值。由于这个后效随着时間的推移而将消灭，所以当 $|t-\tau|$ 很大时，几乎可以认为它是 0。

令 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为在 t 以前脉冲发生的时刻，又令 a_k 为在 t_k 上所发生的脉冲强度，于是在 t 的后效和可以写成

$$X(t)=\sum_{k=1}^{n} a_k W(t, t_k). \tag{21.1}$$

因为脉冲的发生完全是随机的，所以可以认为脉冲的发生遵循 Poisson 分布是正确的。这就是說，在 s 的时間間隔內，有 k 个脉冲发生的概率等于

$$e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}, \tag{21.2}$$

此处 c 是表示频数的常数。(21.1) 更可以写成

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} W(t, s)\,dy(s), \tag{21.3}$$

此处 $y(t)$ 在脉冲发生的时点之間为一常数，而且 $y(t)$ 在脉冲发生的时点上的跳跃表示脉冲的强度。强度也完全是随机变化的。因此，設 $y(t)$ 的跳跃遵循一定的概率分布。又設

$$y(t_2)-y(t_1),\quad y(s_2)-y(s_1)\quad (s_1<s_2\leqslant t_1<t_2)$$

为独立。

若 $y(t)$ 在时点 t_i 上不連續，則設 $y(t_i+0)-y(t_i-0)=u_i$ 遵循一个概率分布。令 $F(x)$ 为这个 u_i 的分布函数（不依賴于 i），又設 $u_1, u_2, \cdots$ 为独立。

稍为更詳細一些，就是假設

$$\begin{aligned}
&P(y(t+s)-y(t)\leqslant\xi)\\
&\quad=0 && (\xi<0),\\
&\quad=e^{-cs} && (\xi=0),\\
&\quad=e^{-cs}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}P\Big(\sum_{i=1}^{k} u_i\leqslant\xi\Big) && (\xi>0).
\end{aligned} \tag{21.4}$$

更假設

$$0<u_i\leqslant M \quad (M\text{ 是常数}),\tag{21.5}$$

$$\mathrm{E}\,u_i=\alpha,\quad \mathrm{E}\,u_i^2=\beta.\tag{21.6}$$

让我們叙述随机过程 $y(t)$ 的一些性质。

$$\mathrm{E}(y(t+s)-y(t))=\int_0^\infty \xi dP(y(t+s)-y(t)\leqslant\xi)$$

$$=\sum_{k=1}^\infty e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}\int_0^\infty \xi dP\left(\sum_{i=1}^k u_i\leqslant\xi\right)$$

因为式中的积分是 $\sum_{i=1}^k u_i$ 的平均值，即等于 $\sum_{i=1}^k \mathrm{E}(u_i)=k\alpha$

$$=\sum_{k=1}^\infty e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}k\alpha=\alpha e^{-cs}cs\sum_{k=1}^\infty\frac{(cs)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\alpha cs,$$

于是

$$\mathrm{E}(y(t+s)-y(t))=\alpha cs.\tag{21.7}$$

因此，令

$$Y(t)=y(t)-\alpha ct,\tag{21.8}$$

則

$$\mathrm{E}(Y(t+s)-Y(t))=0.$$

其次，令 $s_1<s_2\leqslant t_1<t_2$，則

$$\mathrm{E}(Y(t_2)-Y(t_1))(Y(s_2)-Y(s_1))$$

$$=\mathrm{E}(Y(t_2)-Y(t_1))\mathrm{E}(Y(s_2)-Y(s_1))=0.$$

又 $\mathrm{E}|Y(t+s)-Y(t)|^2=\mathrm{E}(y(t+s)-y(t))^2-\alpha^2c^2s^2$

$$=\int_0^\infty \xi^2 dP(y(t+s)-y(t)\leqslant\xi)-\alpha^2c^2s^2$$

$$=\sum_{k=1}^\infty e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}\int_0^\infty \xi^2 dP\left(\sum_{i=1}^k u_i\leqslant\xi\right)-\alpha^2c^2s^2$$

$$=\sum_{k=1}^\infty e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}\{k(\beta-\alpha^2)+(k\alpha)^2\}-\alpha^2c^2s^2$$

$$=\beta cs+\alpha^2\sum_{k=1}^\infty k(k-1)e^{-cs}\frac{(cs)^k}{k!}-\alpha^2c^2s^2$$

$$=\beta cs.$$

于是得到

$$E(Y(t)-Y(s))=0, \tag{21.9}$$

$$E|Y(t)-Y(s)|^2=c\beta t-c\beta s, \tag{21.10}$$

而且 $Y(t)$ 是正交过程。

因此，根据 §13 的討論，对任意的 t 可以定义

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} W(t, s)dY(s), \tag{21.11}$$

此处 $W(t, s)$ 作为 s 的函数，滿足：

$$W(t, s)\in L_2(-\infty, \infty). \tag{21.12}$$

这样定义的 $X(t)$ 叫做噪声过程。

§22 噪声过程的分布

为了研究噪声过程的分布，我們来求它的特征函数。采用上节的定义和記号。

引理 22.1 $\Delta_s Y=Y(t+s)-Y(t)$ 的特征函数为

$$\exp\{cs(g(u)-1-i\alpha u)\}, \tag{22.1}$$

此处 $g(u)$ 是 u_i 的特征函数。

証明 $\Delta_s Y$ 的特征函数是

$$\begin{aligned}
&E\exp[iu\{Y(t+s)-Y(t)\}]\\
&=E\exp[iu(y(t+s)-y(t)-c\alpha s)]\\
&=\exp(-iuc\alpha s)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(iu\xi)dP(y(t+s)-y(t)<\xi)\\
&=\exp(-iuc\alpha s)\left(e^{-cs}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-cs}(cs)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu\xi}dP\left(\sum_{i=1}^{k}u_i\leqslant\xi\right)\right)
\end{aligned}$$

由 $\{u_i\}$ 的独立性

$$\begin{aligned}
&=\exp(-iuc\alpha s)\left(e^{-cs}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-cs}(cs)^k}{k!}g^k(u)\right)\\
&=e^{-iuc\alpha s}e^{-cs}e^{csg(u)}=\exp\{cs(g(u)-1-iu\alpha)\}.
\end{aligned}$$

利用这个引理，往証下列的

定理 22.1 (21.11)所定义的 $X(t)$ 的特征函数为

$$f(u)=\exp\left[c\int_{-\infty}^{\infty}\{g(uW(t,s))-1-i\alpha W(t,s)u\}ds\right]. \quad (22.2)$$

証明 令 $W(t,s)=G(s)$，只須証明 $X=\int_{-\infty}^{\infty}G(s)dY(s)$ 的特征函数为

$$\exp\left[c\int_{-\infty}^{\infty}\{g(uG(s))-1-i\alpha G(s)u\}ds\right] \quad (22.3)$$

即可。

首先，对 $G(t)$ 为下列阶梯函数

$$G(t)=\begin{cases}0 & (t<a_0),\\ c_j & (a_{j-1}\leqslant t<a_j)\ (j\leqslant n),\\ 0 & (t\geqslant a_n)\end{cases} \quad (22.4)$$

的情形，往証(22.3). 这时，由定义有

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(t)dY(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j\{Y(a_j-0)-Y(a_{j-1}+0)\}$$

$$=\underset{\varepsilon\to+0}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=1}^{n}c_j\{Y(a_j-\varepsilon)-Y(a_{j-1}+\varepsilon)\}.$$

因为均方收斂蘊涵依概率收斂，所以

$$\mathrm{E}\exp\left(iu\int_{-\infty}^{\infty}G(t)dY(t)\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\mathrm{E}\exp\left[iu\sum_{j=1}^{n}c_j\{Y(a_j-\varepsilon)-Y(a_{j-1}+\varepsilon)\}\right]$$

由于 $\sum$ 内的随机变数是独立的

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{E}\exp[iuc_j\{Y(a_j-\varepsilon)-Y(a_{j-1}+\varepsilon)\}]$$

由引理 22.1

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\prod_{j=1}^{n}\exp[c(a_j-a_{j-1}-2\varepsilon)(g(uc_j)-1-iuc_j\alpha)]$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\exp[c(a_j-a_{j-1})(g(uc_j)-1-iuc_j\alpha)]$$

$$=\exp\sum_{j=1}^{n}c(a_j-a_{j-1})(g(uc_j)-1-iuc_j\alpha)$$

$$=\exp\left[c\int_{-\infty}^{\infty}\{g(uG(s))-1-i\alpha G(s)u\}ds\right].$$

于是对 $G(t)$ 由(22.4)給定的情形,証明了(22.3)。

其次,对一般的 $G(t)\in L_2(-\infty,\infty)$,取(22.4)那样的阶梯函数 $G_n(t)$,并設 $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty}G_n(t)=G(t)$。

$$|(g(uG(t))-1-i\alpha G(t)u)-(g(uG_n(t))-1-i\alpha G_n(t)u)|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}[\exp(iuG(t)x)-\exp(iuG_n(t)x)\right.$$

$$\left.-(iG(t)ux-iG_n(t)ux)]dF(x)\right|\text{[1]}$$

$$\leqslant K\cdot u^2|G(t)-G_n(t)|^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x).$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\{g(uG(t))-1-i\alpha G(t)u\}$$

$$-\{g(uG_n(t))-1-i\alpha G_n(t)u\}|dt$$

$$\leqslant\beta Ku^2\int_{-\infty}^{\infty}|G(t)-G_n(t)|^2dt\to 0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{g(uG_n(t))-1-i\alpha G_n(t)u\}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\{g(uG(t))-1-i\alpha G(t)u\}dt.$$

从而(22.3)得証。　　　　証毕

系 22.1　当 $W(t,s)=W(t-s)$ 时,$X(t)$ 的特征函数为

$$f(u)=\exp\left[c\int_{-\infty}^{\infty}\{g(W(s)u)-1-i\alpha W(s)u\}ds\right].\quad(22.5)$$

这是(22.2)的特殊情形。这时 $f(u)$ 不依赖于 t。但是(22.2)一般地依赖于 t,所以 $X(t)$ 的分布依赖于 t。因此 $X(t)$ 不一定是

---

[1] 存在常数 K 使得 $|e^{ia}-e^{ib}-ia+ib|\leqslant K(a-b)^2$。

平稳过程。当

$$W(t, s) = W(t-s) \tag{22.6}$$

时，从形状

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-s)\,dY(s)$$

看出，这是严格平稳过程，从而是宽平稳过程。

实际上，从协方差函数也可以看出这一点。

下面求 $X(t)$ 的协方差函数。在此之前，从定理 22.1 推出下列的

定理 22.2 对 $X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} W(t, s)\,dY(s)$，有

$$\mathrm{E}\,X(t)=0, \quad \mathrm{Var.}\,X(t)=c\beta\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t, s)\,ds. \tag{22.7}$$

这叫做 Campbell 定理。微分 $X(t)$ 的特征函数就容易得証。又，$X(t)$ 的半不变量 $\lambda_k(t)$ 为

$$\lambda_k(t)=c\mu_k'\int_{-\infty}^{\infty} W^k(t, s)\,ds, \quad k\geq 2, \tag{22.8}$$

此处 μ_k' 是 u_l 的 k 阶矩。

其次，計算 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的联合分布的特征函数。其实这也是定理 22.1 的特殊情形。因为令 u, v 为任意的实数(固定的)，并考虑

$$uX(t_1)+vX(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\{uW(t_1, s)+vW(t_2, s)\}\,dY(s),$$

則作为 s 的函数，$W(t, s)\in L_2(-\infty, \infty)$，所以 $G(s)=uW(t_1, s)+vW(t_2, s)\in L_2(-\infty, \infty)$，于是从(22.3)推出上式的特征函数为

$$f(w)=\exp\Big[c\int_{-\infty}^{\infty}\{g(w(uW(t_1, s)+vW(t_2, s)))-1$$
$$-i\alpha w(uW(t_1, s)+vW(t_2, s))\}\,ds\Big].$$

令 $w=1$ 便得 $f(1)=\mathrm{E}\exp i(uX(t_1)+vX(t_2))$，而这就是 $(X(t_1), X(t_2))$ 的特征函数。于是得到下列的

定理 22.3 $(X(t_1), X(t_2))$ 的特征函数为

$$f(u, v)=\mathrm{E}\exp(iuX(t_1)+ivX(t_2))$$
$$=\exp\left[c\int_{-\infty}^{\infty}\{g(uW(t_1, s)+vW(t_2, s))-1\right.$$
$$\left.-i\alpha(uW(t_1, s)+vW(t_2, s))\}ds\right]. \qquad (22.9)$$

由此計算

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u, v)\right]_{u=v=0}$$

便得到 $X(t)$ 的协方差函数。其結果是

$$\mathrm{E}X(t_1)X(t_2)=c\beta\int_{-\infty}^{\infty}W(t_1, s)W(t_2, s)ds. \qquad (22.10)$$

特别，当(22.6)成立时，我們得到

$$\mathrm{E}X(t+u)X(t)=c\beta\int_{-\infty}^{\infty}W(u+v)W(v)dv. \qquad (22.11)$$

这显然是只依赖于 u 的函数，卽 $X(t)$ 是寬平稳过程。

§23 噪声过程的譜函数

照样襲用上面的假設。往求当 $W(t, s)=W(t-s)$ 时的噪声过程

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}W(t-s)dY(s) \qquad (23.1)$$

的譜函数。

令 $W^*(t)$ 为 $W(x)\in L_2(-\infty, \infty)$ 的 Fourier 变换，卽

$$W^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}e^{-ixt}W(x)dx. \qquad (23.2)$$

于是如众所周知的那样，

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}e^{ixt}W^*(t)dt.$$

由(22.11)推出，(23.1)的协方差函数是

$$\rho(u)=c\beta\int_{-\infty}^{\infty}W(u+v)W(v)dv,$$

由 Parseval 等式，又知

$$\rho(u)=c\beta\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(u+v)dv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}e^{ixv}W^*(x)dx$$

$$=c\beta\lim_{A\to\infty}\lim_{B\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}W^*(x)e^{-ixu}dx\int_{-B}^{B}W(u+v)e^{ix(u+v)}dv$$

$$=c\beta\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}W^*(x)e^{-ixu}dx\ \underset{B\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B}W(u+v)e^{ix(u+v)}dv$$

$$=c\beta\int_{-\infty}^{\infty}W^*(x)W^*(-x)e^{-ixu}dx$$

$$=c\beta\int_{-\infty}^{\infty}W^*(x)W^*(-x)e^{ixu}dx。$$

因为 $W^*(x)$ 和 $W^*(-x)$ 是共轭复数，所以

$$\rho(u)=c\beta\int_{-\infty}^{\infty}|W^*(x)|^2e^{ixu}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}d\left(c\beta\int_{-\infty}^{x}|W^*(s)|^2ds\right)。$$

因此，$X(t)$ 的谱函数是

$$c\beta\int_{-\infty}^{x}|W^*(s)|^2ds。\qquad(23.3)$$

§24 正态过程与噪声的极限

令 $X(t)$ 为一随机过程。对任意的有穷个时点 $t_1, t_2, \cdots, t_N$，$(X(t_1), \cdots, X(t_N))$ 的分布恒遵循正态分布时，我們称 $X(t)$ 为正态过程。$X(t_1), \cdots, X(t_N)$ 的联合分布的特征函数为

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sigma_{mn}u_mu_n+i\sum_{m=1}^{N}a_mu_m\right),\qquad(24.1)$$

此处 $\sigma_{mn}=\sigma(t_m, t_n)$ 是 $X(t_m)$ 和 $X(t_n)$ 的协方差，$a_m=a(t_m)$ 是

$X(t_m)$ 的均值，而矩陣 (σ_{mn}) 是非負定的。若行列式 $|\sigma_{mn}|\neq 0$，則上述分布的概率密度为

$$\frac{|\sigma^{mn}|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n{}'\sum_m{}'\sigma^{mn}(x_m-a_m)(x_n-a_n)\right),\quad(24.2)$$

此处 (σ^{mn}) 是 (σ_{mn}) 的逆矩陣。

$(\sigma_{mn})=M$ 是协方差矩陣。記 $(\sigma^{mn})=M^{-1}$，則(24.2)变成

$$\frac{|M^{-1}|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-a)M^{-1}(x-a)'\right),\qquad(24.3)$$

此处

$$x-a=(x_1-a_1,\ \cdots,\ x_N-a_N).$$

下列引理頗为有用。

引理 24.1　設 $X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 遵循正态分布，$EX_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，又令 M 为它的协方差矩陣。令 B 为 n 行 k 列的矩陣，其秩为 k。于是

$$U=XB=(U_1,\ \cdots,\ U_k)$$

也遵循正态分布，而且它的协方差矩陣为 $B'MB$。

这是周知的基本事实，証明从略❶。

現在考慮(21.8)的 $Y(t)$。已知

$$\Delta_sY(t)=Y(t+s)-Y(t)\qquad(24.4)$$

的特征函数是

$$\exp\{cs(g(u)-1-iau)\}.\qquad(24.5)$$

又有

$$E\Delta_sY(t)=0,\quad E|\Delta_sY(t)|^2=\beta cs.\qquad(24.6)$$

現在令

$$\frac{1}{\sqrt{c}}Y(t)=Y_1(t).\qquad(24.7)$$

考慮上式当 $c\to\infty$ 时的极限。这就是在一定时間内發射的个数激

❶ 只需計算 U 的特征函数即可。

增的情形。

$$\Delta_s Y_1(t)=Y_1(t+s)-Y_1(t)=\frac{1}{\sqrt{c}}\Delta_s Y(t),$$

由(24.5)得出它的特征函数为

$$\exp\left\{cs\left(g\left(\frac{u}{\sqrt{c}}\right)-1-i\alpha\frac{u}{\sqrt{c}}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{cs\left(1+i\alpha\frac{u}{\sqrt{c}}-\frac{\beta}{2}\frac{u^2}{c}+\cdots-1-i\alpha\frac{u}{\sqrt{c}}\right)\right\}$$

$$=\exp\left(-\frac{s\beta u^2}{2}+\cdots\right)\to\exp\left(-\frac{s\beta u^2}{2}\right).$$

(当固定 u_0 时，在 $|u|<u_0$ 上一致地)

故当 $c\to\infty$ 时，$\Delta_s Y_1(t)$ 的分布函数收斂于具有均值 0 和方差为 $s\beta$ 的正态分布函数。

如果 $W(t)$ 是对大的 t 取值为 0 的阶梯函数，則

$$\int_{-\infty}^{\infty}W(t-s)\,dY_1(s) \tag{24.8}$$

是 $\Delta Y_1(s)$ 的綫性組合，又因 $\Delta Y_1(s)$ 的分布当 $c\to\infty$ 时趋近于正态分布，所以根据引理 24.1，(24.8) 收斂于正态过程。因为一般的 $W(t)$ 是(24.8) 的均方极限，所以这也收斂于正态过程。于是当 c 趋大时，噪声过程可以看做正态过程。根据这个理由，研究噪声往往要考虑正态过程。

§25 正态过程与 Fourier 級数

研究噪声过程，經常用到 Fourior 級数。現在叙述这样做的根据。令 $X(t)$ 为具 $\mathrm{E}\,X=0$ 的实正态过程，并且是平稳的。如上面已經說过的那样，在正态过程中，寬平稳过程和严格平稳过程这两个概念是一致的。

現在考虑 $X(t)$，$0<t<T$，T 是足够大的数。設

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T X(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt, \tag{25.1}$$

$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T X(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,dt. \tag{25.2}$$

A_n, B_n 当然是随机变数。設

$$C_n(t)=\begin{cases}\frac{2}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T} & (0\leqslant t\leqslant T),\\ 0 & (\text{其他的 } t),\end{cases} \tag{25.3}$$

$$S_n(t)=\begin{cases}-\frac{2}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T} & (0\leqslant t\leqslant T),\\ 0 & (\text{其他的 } t),\end{cases} \tag{25.4}$$

并作

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(T-s)C_n(s)\,ds.$$

这个积分早在第2章中有了定义$\left(\text{因为}\int_{-\infty}^{\infty}\left|d\left(\int_{-\infty}^{s}C_n(u)\,du\right)\right|<\infty\right)$.
它在形式上等于

$$\int_0^T X(u)C_n(T-u)\,du=\frac{2}{T}\int_0^T X(u)\cos\frac{2n\pi(T-u)}{T}\,du=A_n.$$

同样，$\int_{-\infty}^{\infty}X(T-s)S_n(s)\,ds$ 是 B_n。故(25.1)和(25.2)的 A_n 和 B_n 实际上可以考虑分别用

$$A_n=\int_{-\infty}^{\infty}X(T-s)C_n(s)\,ds \tag{25.5}$$

和

$$B_n=\int_{-\infty}^{\infty}X(T-s)S_n(s)\,ds \tag{25.6}$$

来定义。这就是說，$X(t)\ (0\leqslant t\leqslant T)$ 的 Fourier 系数 A_n 和 B_n 分别是以 $X(t)$ 为輸入的綫性过滤器 C_n 和 S_n 在时刻 T 的反应。

因为 X 是正态过程，所以作为这个过程的綫性組合的极限，A_n 和 B_n 也遵循正态分布。更进一步，

$$(A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots)$$

的任意有穷个联合分布也遵循正态分布。考虑 A_i 和 A_j 的协方差。

$$\mathrm{E}\,A_iA_j=\mathrm{E}\int_0^T X(T-s)C_i(s)ds\int_0^T X(T-s')C_j(s')ds'$$

$$\int_0^T\int_0^T C_i(s)C_j(s')\rho(s-s')dsds'.$$

此处 $\rho(u)$ 是 $X(t)$ 的协方差函数（留意 $\mathrm{E}A_i=0$，$(i=1,2,\cdots)$）。上式又可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,A_iA_j&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_i(s)C_j(s')\rho(s-s')dsds'\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_i(s)C_j(s+u)\rho(u)duds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u)du\int_{-\infty}^{\infty}C_i(s)C_j(s+u)ds\\&=\int_{-T}^{T}\rho(u)du\int_0^T C_i(s)C_j(s+u)ds.\end{aligned}\qquad(25.7)$$

当 $u\geqslant0$ 时

$$\int_0^T C_i(s)C_j(s+u)ds=\frac{4}{T^2}\int_0^{T-u}\cos\frac{2i\pi}{T}t\cos\frac{2j\pi}{T}(t+u)dt$$

$$=\frac{4}{T^2}\int_0^T-\frac{4}{T^2}\int_{T-u}^T.$$

又

$$\frac{4}{T^2}\int_0^T\cos\frac{2i\pi}{T}t\cos\frac{2j\pi}{T}(t+u)dt=\begin{cases}\dfrac{2}{T}\cos\dfrac{2j\pi}{T}u & (i=j),\\ 0 & (i\neq j),\end{cases}$$

$$\left|\frac{4}{T^2}\int_{T-u}^T\cos\frac{2i\pi}{T}t\cos\frac{2j\pi}{T}(t+u)dt\right|\leqslant\frac{4u}{T^2},$$

所以代入上式便得

$$\int_0^T C_i(s)C_j(s+u)ds=\begin{cases}\dfrac{2}{T}\cos\dfrac{2j\pi}{T}u+O\left(\dfrac{u}{T^2}\right) & (i=j),\\ O\left(\dfrac{u}{T^2}\right) & (i\neq j),\end{cases}$$

此处 O 表示对 i, j 一致地有界。当 $u<0$ 时，也得到同样的結果。因此，将这結果代入(25.7)，当 $i\neq j$ 时便有

$$|\mathrm{E}\,A_iA_j|\leqslant\frac{4}{T^2}\int_{-T}^{T}|u\rho(u)|du\leqslant\frac{8}{T^2}\int_0^T|u\rho(u)|du. \qquad (25.8)$$

又有

$$\mathrm{E}\,|A_i|^2=\frac{2}{T}\int_{-T}^{T}\rho(u)\cos\frac{2i\pi}{T}u\,du+O\left(\frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}|u\rho(u)|du\right).$$

令 $T\to\infty$ 便得

$$\int_{-T}^{T}\rho(u)\cos\frac{2i\pi}{T}u\,du\to\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u)du$$

$\left(因为\int_{-\infty}^{\infty}|\rho(u)|du<\infty\right)$。于是若 $\int_{-\infty}^{\infty}|u\rho(u)|du<\infty$，则

$$\lim_{T\to\infty}T\,\mathrm{E}|A_i|^2=2\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u)du,$$

从而

$$r=\frac{\mathrm{E}\,A_iA_j}{\sqrt{\mathrm{E}\,A_i^2\,\mathrm{E}\,A_j^2}}=O\left(\frac{1}{T}\right),$$

此处 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u)du\neq0$。概括上述结果，就可以写成下列的

定理 25.1 令 $\rho(u)$ 为正态平稳过程 $X(t)$ ($\mathrm{E}\,X(t)=0$) 的协方差函数，并令

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u\rho(u)|du<\infty.$$

又令 A_i 和 B_i 为 $X(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 的 Fourier 系数。于是对任意的 i, j

$$\mathrm{E}\,A_iB_j=O\left(\frac{1}{T^2}\right), \qquad (25.9)$$

若 $i\neq j$，则

$$\mathrm{E}\,A_iA_j=O\left(\frac{1}{T^2}\right),\quad \mathrm{E}\,B_iB_j=O\left(\frac{1}{T^2}\right). \qquad (25.10)$$

又有

$$\mathrm{E}\,A_i^2 \sim \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u)\,du, \tag{25.11}$$

$$\mathrm{E}\,B_i^2 \sim \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u)\,du. \tag{25.12}$$

若$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u)\,du \neq 0$，則

$$r_1 = \frac{\mathrm{E}\,A_i A_j}{\sqrt{\mathrm{E}\,A_i^2\,\mathrm{E}\,A_j^2}} = O\left(\frac{1}{T}\right) \quad (i \neq j), \tag{25.13}$$

$$r_2 = \frac{\mathrm{E}\,B_i B_j}{\sqrt{\mathrm{E}\,B_i^2\,\mathrm{E}\,B_j^2}} = O\left(\frac{1}{T}\right) \quad (i \neq j), \tag{25.14}$$

$$r_3 = \frac{\mathrm{E}\,A_i B_j}{\sqrt{\mathrm{E}\,A_i^2\,\mathrm{E}\,B_j^2}} = O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{25.15}$$

同样可以証明 (25.9)，(25.10) 的第二式，(25.12)，(25.14) 和(25.15)，这里从略。

根据这个定理，当 T 大时可以假設 Fourier 系数为相互独立。又由引理 24.1 推出，A_i 和 B_j 都遵循正态分布。

第6章 排队問題

假設顾客来到窗口接受某种服务。如果服务时間拉長，在窗口排队的長度也就拉長。我們来考慮这时排队長度的分布，也考慮增加窗口个数时排队長度的变化，以及顾客等待时間的分布等問題。这种理論的成果，广泛地应用于車站售票处的設計，机場跑道的规模以及貨船裝貨所需时間等問題。又如在工厂中，对发生故障的机器的修理应預备多少个修理工或修理机等事故管理問題，也找到了广泛的应用。如果过多地預备修理机，閑着的修理机就会增加，造成設备费的积压；如果过少地預备修理机，发生故障的机器待修的时間就会拉長，造成生产的損失。于是我們要討論的問題是，怎样安排最为有利。患病的人在医院中的等待，同样也属于这类問題，特別在英国，在理論上和实驗上都有所研究。又电話呼喚的等待問題也完全相仿，这方面的問題很早以来就有了研究。实际上，在自动交换机上电話中继的等待，作为电話网的問題来說，是极其重要的。

近年来，人們在各种現象中探求其規律性，并且系統地形成了改动和控制这些现象的方法。而且人們企图以此作为經营管理以及其他一般筹划中的决策 (decision making) 的根据。这門学科叫做运筹学 (operations research，簡称为 O. R.)，而排队論及其成果的应用，就是 O. R. 的一个方法。

本章叙述排队的数学理論背景。

§ 26 Марков 过程

令 $X(t)$ $(t\geqq 0)$ 为取值 0, 1, 2, ⋯ 的(单純) Марков 过程，并

且具有平稳的轉移概率。也就是說，轉移概率

$$P(X(t+s)=j\,|\,X(s)=i)=p_{ij}(t)$$

只依賴于 t. 上式左边意味着 X 在时刻 s 取 i 的条件下在时刻 $t+s$ 取 j 的条件概率。这里假設

$$\lim_{t\to+0} p_{ij}(t)=\begin{cases}0 & (i\neq j),\\ 1 & (i=j).\end{cases} \tag{26.1}$$

此外必須注意下列关系式，即

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \quad (s>0,\ t>0). \tag{26.2}$$

这是 Колмогоров-Chapman 方程。

由 (26.1) 推知，$p_{ij}(t)$ 对任意的 t 为連續. 因为

$$\lim_{\varepsilon\to+0} p_{ij}(t+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t)p_{kj}(\varepsilon)=p_{ij}(t).$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0}(p_{ij}(t)-p_{ij}(t-\varepsilon))&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t-\varepsilon)p_{kj}(\varepsilon)-p_{ij}(t-\varepsilon)\right]\\ &=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sum_{k\neq j} p_{ik}(t-\varepsilon)p_{kj}(\varepsilon)-p_{ij}(t-\varepsilon)\{1-p_{jj}(\varepsilon)\}\right]\\ &=0.\end{aligned}$$

又

$$p'_{ii}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=q_i \tag{26.3}$$

存在，此处 $0\leqslant q_i\leqslant\infty$. 若 $q_i<\infty$，則称状态 i 为稳定的. (26.3) 的証明如下:

令 α 为正数，$\delta=\frac{1}{2^n}$ (n 是自然数)，又令 $m\delta$ 为 $\geqslant\alpha$ 的最小的 δ 的倍数。

$$
\begin{aligned}
P(X(t)=i,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha\,|\,X(t_0)=i)
&=\lim_{\delta\to 0}P(X(t_0+j\delta)=i\,(j=1,2,\cdots,m-1),\ X(\alpha+t_0)\\
&\qquad =i\,|\,X(t_0)=i)\\
&=\lim_{\delta\to 0}P(X(t_0+j\delta)=i\,(j=1,2,\cdots,m)\,|\,X(t_0)=i)\text{❶}.
\end{aligned}
$$

上式右边为 $\lim_{\delta\to 0}p_{ii}^{m}(\delta)$，若这个极限值为正，則取对数便得

$$
\lim_{\delta\to 0}m\log p_{ii}(\delta)=-\lim_{\delta\to 0}\alpha\frac{1-p_{ii}(\delta)}{\delta}.
$$

于是 $\lim_{\delta\to 0}\dfrac{1-p_{ii}(\delta)}{\delta}=q_i$ 存在。而且

$$
P(X(t)=i,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha\,|\,X(t_0)=i)=e^{-q_i\alpha}. \qquad (26.4)
$$

若 $\lim_{\delta\to 0}p_{ii}^{m}(\delta)=0$，則

$$
\lim_{\delta\to 0}\frac{1-p_{ii}(\delta)}{\delta}=\infty.
$$

下面假定 $X(t)$ 所取的値都为稳定状态。設 $P(X(0)=i)=1$，并令 λ_i 为使 $X(t)\equiv i$ 的第一个 t 的区間长度，于是由(26.4)推出

$$
P(\lambda_i\leqslant t)=1-e^{-q_i t}. \qquad (26.5)
$$

令 j 为任意的状态，并設

$$
\alpha_{ij}=\inf_{\lambda_i<t,\ X(t)=j}t.
$$

若 $i\neq j$，則 α_{ij} 是第一次轉移到 j 的时間。λ_i 与 $\alpha_{ij}-\lambda_i$ 是独立随机变数。若

$$
\lambda_{si}=\sup_{X(t)\equiv i,\ s<t<s+T}T,\qquad \alpha_{sij}=\inf_{\lambda_{si}<t,\ X(t)=j}t
$$

(显然 $\alpha_{0ij}=\alpha_{ij}$，$\lambda_{0i}=\lambda_i$)，則有

$$
P\{\alpha-\lambda>u\,|\,X(0)=i\}=P\{\alpha_s-\lambda_s>u\,|\,X(s)=i\}
$$

---

❶ 严格地説，应令 $X(t)$ 为可分(separable)。从(26.1)的第二式看出，$X(t)$ 依概率收斂于 $X(t_0)$，所以在 $(t_0,\ t_0+\alpha)$ 内任意取一稠密点集，則得相应于❶的式子。这里，我們选擇了点集 $t_0+j\delta\,(j=1,2,\cdots,m)$，$\delta=\frac{1}{2^n}\,(n=1,2,\cdots)$ 作为稠密集合。

(α_{ij} 和 α_{sij} 分别简記为 α 和 α_s。对 λ 和 λ_s 也是如此)。

$$P(X(t)=j \mid \lambda=s)=r_{ij}(t-s)\text{❶} \tag{26.6}$$

叫做"X 从时刻 s 离开 i 后在时刻 t 到达 j 的概率"。其次假設我們可以写成下列形状

$$P(\alpha_{ij}-\lambda_i>u \mid X(0)=i)=P(\alpha_{sij}-\lambda_{si}>u \mid X(s)=i)$$
$$=\int_u^\infty f_{ij}(v)\,dv, \tag{26.7}$$

其中 $f_{ij}(v)$ 叫做"X 离开 i 后經过时間 v 开始到达 j 的概率密度"。

从(26.4)推出，$X(t)$在 $(t, t+\Delta t)$ 間离开 i 的概率(令 $X(t)=i$)是 $1-e^{-q_i\Delta t}=q_i\Delta t+o(\Delta t)$。

当 $X(0)=i$ 时，事件 $X(t)=i$ 由下述两个事件組成：令 $0<\xi<\eta<t$，X 在 ξ 开始离开 i，在 η 回到 i，然后在 $t-\eta$ 后回到 i 这样的事件，以及 X 从 $t=0$ 一直到 t 继續保持状态 i 这样的事件。故有

$$p_{ii}(t)=\int_0^t d\eta\int_0^\eta q_i e^{-q_i\xi} f_{ii}(\eta-\xi)\,p_{ii}(t-\eta)\,d\xi+e^{-q_it}. \tag{26.8}$$

这又可以写为

$$p_{ii}(t)=\int_0^t p_{ii}(t-\eta)\,k_i(\eta)\,d\eta+e^{-q_it}, \tag{26.9}$$

此处 $k_i(\eta)=\int_0^\eta q_i e^{-q_i\xi} f_{ii}(\eta-\xi)\,d\xi$，这就是第 I 章 (4.1) 的更新方程。因此根据定理 4.2，$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)$ 存在❷。把此叙述为下列引理。同样还可証明 $p_{ij}(t)$ 的情形。

---

❶ 正确地說，这对 $(0, t)$ 内几乎所有的 s 有意义，但也可以考虑这种条件概率，使对所有的 s 成立。K. L. Chung (钟开莱) [1], P. Lévy [1]。

❷ 当 $q_i>0$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-q_it}=0$，这满足定理 4.2 的条件。当 $q_i=0$ 时，从(26.8)立刻看出引理成立。

引理 26.1 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)$ 存在.

現在給出若干定义。以后无特别声明时假設 $q_i>0$. 当 $\int_0^\infty f_{ii}(t)\,dt=1$ 以及 $\int_0^\infty tf_{ii}(t)\,dt<\infty$ 时，称状态 i 为**各态遍历的**。这就是說，从 i 出发，迟早又回到 i（概率为 1 地），并且它的平均循环时間为有限。

定理 26.1 若状态 i 不是各态遍历的，则对任意的 j

$$\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t)=0.$$

証明 令 $j=i$. 若 i 不是各态遍历的，又 $\int_0^\infty f_{ii}(t)\,dt<1$，则在 (26.9) 中令 $t\to\infty$ 便得（注意 $q_i>0$）

$$\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)=\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)\int_0^\infty k_i(\eta)\,d\eta.$$

不难看出 $\int_0^\infty k_i(\eta)\,d\eta=\int_0^\infty f_{ii}(t)\,dt$，因此得到 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)=0$. 又当 $\int_0^\infty f_{ii}(t)\,dt=1$, $\int_0^\infty tf_{ii}(t)\,dt=\infty$ 时，从定理 4.2 推出 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)=0$. 因为定理 4.2 的 m 为

$$\int_0^\infty vk_i(v)\,dv=\int_0^\infty tf_{ii}(t)\,dt-\frac{1}{q_i}\int_0^\infty f_{ii}(t)\,dt=\infty.$$

当 $j\neq i$ 时，代替 (26.8) 我們有

$$p_{ji}(t)=\int_0^t f_{ji}(\xi)\,p_{ii}(t-\xi)\,d\xi, \qquad (26.10)$$

由于 i 不是各态遍历的，所以如上所示，$p_{ii}(t)\to 0$，利用这个事实在 (26.10) 中令 $t\to\infty$ 便得到 $\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t)=0$. 証毕

此外，这个定理的逆定理也成立，証明从略。

其次，若对某个 t, $p_{ji}(t)>0\,(j\neq i)$，则称状态 i 为**从 j 可到达的状态**。若对所有的 i, $j\,(i\neq j)$, i 是从 j 可到达的，则称 $X(t)$ 为**既約的**。

定理 26.2 若 $X(t)$ 是既約过程，則所有的状态 0, 1, 2, … 要末都是各态遍历的，要末都不是各态遍历的。

証明 不存在使 $q_i=0$ 的 i。否則，若存在，則 $X(t)$ 一旦到达状态 i 以后，就概率为 1 地老是停留于 i 而不轉移到其他状态，因此 $X(t)$ 不是既約的。

因为 $X(t)$ 是既約的，所以存在 t、s 满足

$$p_{ij}(t)=\alpha>0, \quad p_{ji}(s)=\beta>0,$$

故

$$p_{ii}(t+r+s)\geq p_{ij}(t)p_{jj}(r)p_{ji}(s)=\alpha\beta p_{jj}(r). \tag{26.11}$$

所以若对某个 i，$p_{ii}(t)\to 0\ (t\to\infty)$，則在 (26.11) 中令 $r\to\infty$ 便得 $p_{jj}(r)\to 0$。这表明，若某个 i 不是各态遍历的，則其余所有的 j 也不是各态遍历的。因为我們只有这两种情形中的一个：要末所有的状态都是各态遍历的，要末至少有一个状态不是各态遍历的，所以不是各态遍历的必要与充分条件是，对某个 i，$p_{ii}(t)\to 0$。于是定理的証明完毕。 証毕

所有的状态都为各态遍历的既約过程叫做**各态遍历过程**。

因为在各态遍历过程中 $p_{ii}(t)\to c_{ii}(>0)$，所以从 (26.10) 推出

$$\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t)=c_{ii}\int_0^\infty f_{ji}(\xi)\,d\xi=c_{ii}. \tag{26.12}$$

若对某个 j_0 有 $\int_0^\infty f_{j_0 i}(\xi)\,d\xi<1$，則

$$c_{j_0 i}<c_{ii}. \tag{26.13}$$

現在，取 s 使 $p_{ij_0}(s)>0$，并在 Колмогоров-Chapman 方程

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(s)p_{ji}(t)=p_{ii}(s+t)$$

中令 $t\to\infty$，便有

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(s)c_{ji}=c_{ii}, \tag{26.14}$$

因此

$$c_{ji}=\sum_{j\neq j_0}p_{ij}(s)c_{ji}+p_{ij_0}(s)c_{j_0i}$$

由(26.12)和(26.13)

$$<c_{ii}\sum_{j\neq j_0}p_{ij}(s)+p_{ij_0}(s)c_{ii}=c_{ii}\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}(s)。$$

因此 $1<\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}(s)$。这是矛盾的。于是得到下列的

定理 26.3 在各态遍历过程中，对所有的 i, j,

$$\int_0^{\infty}f_{ij}(\xi)d\xi=1。\tag{26.15}$$

又
$$\lim_{t\to\infty}p_{ji}(t)=c_{ii}(>0)。$$

本定理第二部分是这样得到的：从(26.12)左边等式，并利用(26.15)使得

$$c_{ji}=c_{ii}。$$

以后記 c_{ii} 为 c_i。

定理 26.4 在既約的各态遍历过程中，对所有的 i,

$$c_i>0,\quad \sum_{i=0}^{\infty}c_i=1。\tag{26.16}$$

又对所有的 i 以及 t,

$$c_i=\sum_{j=0}^{\infty}c_jp_{ji}(t)。\tag{26.17}$$

又若对某些$\{d_i\}$以及所有的 t,

$$d_i=\sum_{j=0}^{\infty}d_jp_{ji}(t)\tag{26.18}$$

并且 $\sum_0^{\infty}|d_i|<\infty$，則存在常数 α 使得

$$d_i=\alpha c_i。\tag{26.19}$$

証明 如(26.14)一样得到(26.17)。在(26.18)中令 $t\to\infty$ 便得

$$d_i=\sum_j d_jc_i=c_i\sum_j d_j。$$

这无非就是 (26.19) ($a=\sum d_j$)。特别，令 $d_i=c_i$，便有 $c_i=c_i\sum c_j$，$c_i>0$(根据定理 26.3)，因而 $\sum c_j=1$，于是得到(26.16)。 証毕

§ 27 排队問題与生灭过程

假設顾客来到窗口接受某种服务后离开。这时我們考虑顾客在窗口的排队。这类問題，由下列四种因素决定：(1) 顾客来到窗口的頻率，(2) 窗口的个数，(3) 排队的規則，(4) 服务时間分布。所以必須对它們作适当的假設。

例如，对 (1) 假設顾客来到窗口的到达时間間隔的分布，对 (3) 假設顾客依到达次序接受服务或者一定要参加排队，等等。

(a) 假設顾客来到窗口的分布遵循 Poisson 分布。亦即假設 k 个顾客在时間間隔 t 内出現的概率为 $e^{-\frac{t}{a}}\left(\frac{t}{a}\right)^k\frac{1}{k!}$ ($k=0,1,2,\cdots$)。这样，若令 T 为从一个顾客到来到另一个顾客到来的时間，則 T 的分布是指数分布。亦即

$$P(T<t)=\begin{cases}1-e^{-\frac{t}{a}} & (t>0),\\ 0 & (t\leqslant 0).\end{cases} \tag{27.1}$$

上式从下述容易看出：因为 $T>t$ 意味着在 t 之間沒有出現一个顾客，于是从 Poisson 分布 $k=0$ 的情形推出，这个事件的概率等于 $e^{-\frac{t}{a}}$。

(b) 假設窗口的个数为 l。

(c) 假設顾客来到窗口一定参加排队。

(d) 假設服务时間 V 的分布为

$$P(V<s)=\begin{cases}1-e^{-\frac{s}{b}} & (s>0),\\ 0 & (s\leqslant 0).\end{cases} \tag{27.2}$$

令 $X(t)$ 表示 t 时的排队長度❶。$X(t)$ 取值为 $0, 1, 2, \cdots$。依上面的假設，$X(t)$ 形成 Марков 过程。其証明如下：t 时在某个窗口接受服务的顾客在 $t+s$ 后服务結束的概率为 $1-e^{-\frac{s}{b}}$，这不依賴于 t. 因为，若这个服务在 t 以前 s_0 时即在 $t-s_0$ 时开始，則服务在继續 s_0 以上的条件下在 $s+s_0$ 內結束的概率为

$$\frac{P(s_0<V, V\leqq s_0+s)}{P(s_0<V)}=\frac{P(s_0<V\leqq s_0+s)}{P(s_0<V)}$$

$$=\frac{P(V\leqq s_0+s)-P(V\leqq s_0)}{P(V>s_0)}=\frac{e^{-\frac{s_0}{b}}-e^{-\frac{(s_0+s)}{b}}}{e^{-\frac{s_0}{b}}}=1-e^{-\frac{s}{b}}.$$

这样一来，当 $X(t)=i$ 时，$X(t+s)=j$ 的概率是下列概率对 k 的求和：在 s 之間 k 个顾客接受了服务和 $(j-i+k)$ 个顾客出現的概率（当 $i=0$ 时也是如此）。由于上述概率的总和不依賴于 t，所以 $X(t)$ 形成 Марков 过程。

在 Δt 之間一个顾客出現的概率为 $e^{-\frac{\Delta t}{a}}\frac{\Delta t}{a}=\frac{\Delta t}{a}+o(\Delta t)$，二个以上顾客出現的概率为 $e^{-\frac{\Delta t}{a}}\left(\frac{\Delta t}{a}\right)^2\frac{1}{2!}+\cdots=o(\Delta t)$。同样，在 Δt 之間結束一个服务的概率为 $\frac{\Delta t}{b}+o(\Delta t)$，結束二个以上服务的概率为 $o(\Delta t)$。因此，当 j 个顾客正在接受服务时，其中某一个顾客接受了服务的概率为 $\frac{j\Delta t}{b}+o(\Delta t)$。

当 $X(0)=i$ 时，若 $j\geqq l$，則事件 $X(t+\Delta t)=j$ 等价于下列四个事件之一：

1° $X(t)=j-1$ 而且 $X(t+\Delta t)=j$,

2° $X(t)=j$ 而且 $X(t+\Delta t)=j$,

3° $X(t)=j+1$ 而且 $X(t+\Delta t)=j$,

❶ 窗口个数是 l 个，但假設排队在某处排成一列，等某个窗口空閑时就在那里接受服务。

4° 上述以外的情形。

4° 等价于下列两个事件中的一个：二个以上顾客在 Δt 之間接受了服务，或者二个以上顾客刚刚到来。因此 1°，2°，3° 和 4° 的概率分别为

(1) $p_{i,j-1}(t)\frac{\Delta t}{a}$，

(2) $p_{ij}(t)\left(1-\frac{\Delta t}{a}-j\frac{\Delta t}{b}\right)$，

(3) $p_{i,j+1}(t)\frac{j+1}{b}\Delta t$，

(4) $o(\Delta t)$。

因此

$$p_{ij}(t+\Delta t)=p_{i,j-1}(t)\frac{\Delta t}{a}+p_{ij}(t)\left(1-\frac{\Delta t}{a}-\frac{j\Delta t}{b}\right)$$
$$+p_{i,j+1}(t)(j+1)\frac{\Delta t}{b}+o(\Delta t)\qquad (j<l). \qquad (27.3)$$

当 $j\geq l$ 时同样有

$$p_{ij}(t+\Delta t)=p_{i,j-1}(t)\frac{\Delta t}{a}+p_{ij}(t)\left(1-\frac{\Delta t}{a}-\frac{l\Delta t}{b}\right)$$
$$+p_{i,j+1}(t)\frac{l\Delta t}{b}+o(\Delta t)\qquad (j\geq l). \qquad (27.4)$$

此处令 $p_{i,-1}(t)\equiv 0$。从这些等式作 $p_{ij}(t+\Delta t)-p_{ij}(t)$ 并以 Δt 去除之，然后再令 $\Delta t\to 0$，便得

$$p'_{ij}(t)=p_{i,j-1}(t)\frac{1}{a}-p_{ij}(t)\left(\frac{1}{a}+\frac{j}{b}\right)+p_{i,j+1}(t)\frac{j+1}{b}$$
$$(j<l), \qquad (27.5)$$

$$p'_{ij}(t)=p_{i,j-1}(t)\frac{1}{a}-p_{ij}(t)\left(\frac{1}{a}+\frac{l}{b}\right)+p_{i,j+1}(t)\frac{l}{b}$$
$$(j\geq l), \qquad (27.6)$$

$(p_{i,-1}(t)\equiv 0)$。

我們有 $p_{ij}(t)>0$。因为当 $X(0)=i$ 时，在 t 之間增加(或減少) $j-i$ 个顾客的概率是正的。不难看出，$p_{ij}(t)\to 0\ (j\neq i,\ t\to 0)$，$p_{ii}(t)\to 1\ (t\to 0)$。又由 $\lim\limits_{t\to 0} p'_{ii}(t)=-\frac{1}{a}-\frac{i}{b}\ (i<l)$，$=-\frac{1}{a}-\frac{l}{b}$ $(i\geqslant l)$，可知所有的状态都是稳定的。

我們将根据(27.5)和(27.6)来考虑

$$P(X(t)=i),$$

即排队長度等于 i 的概率。

当 $l=\infty$ 时，上列方程取形状

$$p'_{ij}(t)=\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t)+\mu_{j+1}p_{i,j+1}(t)$$
$$(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)。\qquad (27.7)$$

以这个 $p_{ij}(t)$ 为轉移概率的随机过程，一般叫做**生灭过程**。从这个微分方程可以証明 $p_{ij}(t)$ 的存在和 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 的存在。又对如何来求 $p_{ij}(t)$ 人們也有所研究❶。关于 $X(t)$ 的方差函数等等，人們对 $l=1$ 的情形也作了研究❷。

現在回到方程(27.5)和(27.6)。

根据上节的討論，可知

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=e_{ij} \qquad (27.8)$$

存在。又有

$$\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t)=0. \qquad (27.9)$$

因为由(27.8)推知，(27.5)和(27.6)右边的极限存在，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} p'_{ij}(t)$ 也存在。如果这个极限值不为0，那末必存在一个 T，使得

$$p'_{ij}(t)\geqslant \alpha>0,\quad t\geqslant T, \qquad (27.10)$$

❶ 参看 W. Ledermann-G. E. H. Reuter [1]。

❷ 参看 P. M. Morse [1]。

或者

$$p'_{ij}(t) \leqslant -\alpha < 0, \quad t \geqslant T. \tag{27.11}$$

若(27.10)成立，令 $T'' \geqslant T$ 便得

$$\int_{T}^{T''} p'_{ij}(t)\,dt \geqslant \alpha(T''-T),$$

亦即

$$p_{ij}(T'') - p_{ij}(T) \geqslant \alpha(T''-T).$$

因为上式左边不超过 1，所以令 $T''\to\infty$ 便导出矛盾。同样对(27.11)的情形也得出矛盾。因此我們得到(27.9)。于是在(27.5)和(27.6)中令 $t\to\infty$ 便得

$$0 = c_{i,j-1}\frac{1}{a} - c_{ij}\left(\frac{1}{a}+\frac{j}{b}\right) + c_{i,j+1}\frac{j+1}{b} \quad (j<l), \tag{27.12}$$

$$0 = c_{i,j-1}\frac{1}{a} - c_{ij}\left(\frac{1}{a}+\frac{l}{b}\right) + c_{i,j+1}\frac{l}{b} \quad (j\geqslant l), \tag{27.13}$$

此处 $c_{j-1}=0$。由此給出 c_{j0}，就依次可求出 c_{j1}，c_{j2}，…。实际上，我們得到

$$c_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^i c_{j0} & (i<l), \\ \dfrac{1}{l!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^i \left(\dfrac{1}{l}\right)^{i-l} c_{j0} & (i\geqslant l). \end{cases} \tag{27.14}$$

其次，若 $X(t)$ 是各态遍历过程，則 $c_{ji}=c_i>0$，并根据定理 26.4，有 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i = 1$。因此，从(27.14)可知

$$\frac{l^l}{l!}\sum_i \left(\frac{b}{la}\right)^i$$

必須收斂。亦即

$$\frac{b}{al} < 1. \tag{27.15}$$

下面証明这个条件是各态遍历过程的充分条件。

設

$$c'_0 = \left(\sum_{i=0}^{l} \frac{1}{i!}\left(\frac{b}{a}\right)^i + \sum_{i=l+1}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{b}{a}\right)^i \left(\frac{1}{l}\right)^{i-l}\right)^{-1},$$

并考虑

$$c'_i=\begin{cases}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^i c'_0 & (1\leqslant i<l),\\[2ex] \dfrac{1}{l!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^i\left(\dfrac{1}{l}\right)^{i-l}c'_0 & (i\geqslant l)。\end{cases}$$

由于假設(27.15)，所以定义 c'_0 的級数收斂。設

$$\Gamma_j(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c'_i\,p_{ij}(t)。\tag{27.16}$$

根据(27.5)和(27.6)，$\Gamma_j(t)$ 是可微分的，于是得到

$$\Gamma'_j(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c'_i\,p'_{ij}(t)。\tag{27.17}$$

从上式以及(27.5)和(27.6)不难推出

$$\Gamma'_j(t)=\begin{cases}\Gamma_{j-1}(t)\dfrac{1}{a}-\Gamma_j(t)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{j}{b}\right)+\Gamma_{j+1}(t)\dfrac{j+1}{b} & (j<l), \quad (27.18)\\[2ex] \Gamma_{j-1}(t)\dfrac{1}{a}-\Gamma_j(t)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{l}{b}\right)+\Gamma_{j+1}(t)\dfrac{l}{b} & (j\geqslant l), \quad (27.19)\end{cases}$$

此处令 $\Gamma_{-1}(t)=0$。因为 $\Gamma_j(0)=\sum\limits_i c'_i\delta_{ij}=c'_j$，所以令

$$\varDelta_j(t)=\Gamma_j(t)-c'_j,$$

則对所有的 j

$$\varDelta_j(0)=0,\tag{27.20}$$

并且从 c'_j 的定义以及(27.18)和(27.19)推出

$$\varDelta'_j(t)=\begin{cases}\varDelta_{j-1}(t)\dfrac{1}{a}-\varDelta_j(t)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{j}{b}\right)+\varDelta_{j+1}(t)\dfrac{j+1}{b} & (j<l), \quad (27.21)\\[2ex] \varDelta_{j-1}(t)\dfrac{1}{a}-\varDelta_j(t)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{l}{b}\right)+\varDelta_{j+1}(t)\dfrac{l}{b} & (j\geqslant l), \quad (27.22)\end{cases}$$

此处令 $\varDelta_{-1}(t)=0$。因为上式右边可微分，所以 $\varDelta'_j(t)$ 也可微分，即

$\Delta_j''(t)$ 存在。又因表达 $\Delta_j''(t)$ 的式子也可微分，所以同样 $\Delta_j'''(t)$ 也存在。一般地，$\Delta_j(t)$ 无穷地可微分。微分 (27.21) 和 (27.22) n 次便得

$$\Delta_j^{(n+1)}(t)=\begin{cases}\Delta_{j-1}^{(n)}(t)\dfrac{1}{a}-\Delta_j^{(n)}(t)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{j}{b}\right)+\Delta_{j+1}^{(n)}(t)\dfrac{j+1}{b} \\ \qquad\qquad (j<l), \\ \Delta_{j-1}^{(n)}(t)\dfrac{1}{a}-\Delta_j^{(n)}(t)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{l}{b}\right)+\Delta_{j+1}^{(n)}(t)\dfrac{l}{b} \\ \qquad\qquad (j\geq l)。\end{cases}$$

令 $A=\dfrac{1}{a}+\dfrac{l}{b}$，又設

$$|\Delta_j^{(n)}(t)|\leq(2A)^n, \tag{27.23}$$

便有

$$|\Delta_j^{(n+1)}(t)|\leq(2A)^n\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{l}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{l}{b}\right)\right\}=(2A)^{n+1}.$$

又有

$$|\Delta_j(t)|\leq\Big|\sum_{i\neq j}c_i'\,p_{ij}(t)\Big|+c_j'\,|p_{jj}(t)-1|$$

$$\leq\sum_{i\neq j}c_i'+c_j'=\sum_{i=0}^{\infty}c_i'=1.$$

諸如上述，完成了数学归納法，一般地 (27.23) 成立。故 $\Delta_j(t)$ 为正則 $(-\infty<t<\infty)$，并从 $\Delta_j(0)=\Delta_j^{(n)}(0)=0$ 恒等地有 $\Delta_j(t)=0$。故 $\Gamma_j(t)=c_j'$，亦即 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}c_i'\,p_{ij}(t)=c_j'$。令 $t\to\infty$ 便得 $c_j\sum\limits_{i=0}^{\infty}c_i'=c_j'$，从而 $c_j=c_j'$，并因 $c_j'>0$，所以 $X(t)$ 是各态遍历过程。

概括以上所述，我們有

定理 27.1 假設 (a)，(b)，(c)，(d)，并令 $X(t)$ 为 t 时在窗口排队的长度，則 $X(t)$ 成为各态遍历过程的必要与充分条件是

$$\frac{b}{la}<1. \tag{27.24}$$

而且这时

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t)=i \mid X(0)=j)=c_i$$

不依赖于 j，并且

$$c_0=\left(\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}\left(\frac{b}{a}\right)^j+\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{b}{a}\right)^j\left(\frac{1}{l}\right)^{j-l}\right)^{-1}, \quad (27.25)$$

$$c_i=\begin{cases}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^i c_0 & (1\leqslant i<l),\\[2ex] \dfrac{1}{l!}\left(\dfrac{b}{a}\right)^i\left(\dfrac{1}{l}\right)^{i-l} c_0 & (i\geqslant l).\end{cases} \quad (27.26)$$

随着时間的推移，排队长度的分布可以考虑由 (27.25) 和 (27.26) 給出。在实际中通常假定这个分布能够实現。

假設 $X(t)$ 的初始分布由 (27.25) 和 (27.26) 給出。亦即若

$$P(X(0)=i)=c_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

則 $X(t)$ 是平稳过程。关于 $X(t)$，可以求它的协方差函数，以及新到顾客的平均等待时間，等等。

当 $l=1$ 时，

$$\mathrm{E}X(t)=\frac{b}{a-b}. \quad (27.27)$$

令一个顾客的等待时間为 W，則

$$\mathrm{E}W=\frac{b^2}{a-b}. \quad (27.28)$$

又当 $l=1$ 时还有

$$p_{ij}(t)=\delta_{ji}-\left(\frac{1}{b\pi}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}(j-i)}\int_0^t du\int_0^{2\pi}\left[\sin i\theta-\sqrt{\frac{b}{a}}\sin(i+1)\theta\right]\left[\sin j\theta-\sqrt{\frac{1}{ab}}\sin(j+1)\theta\right]$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+2\sqrt{\frac{1}{ab}}\cos\theta\right)d\theta, \quad (27.29)$$

并且它的协方差函数为❶

$$\rho(t)=\frac{b^2}{(a-b)^2}+\frac{b-a}{a^2b^3}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta e^{-wt}}{w^3}d\theta, \quad (27.30)$$

$$w=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-2\sqrt{\frac{1}{ab}}\cos\theta.$$

令 $\frac{b}{a}=\rho$，从上面的討論不难看出，这是一个重要的量。这个 ρ 叫做**交易强度** (traffic intensity)。

§28 服务时間和到达时間間隔的分布 一般情形

在上节的討論中，我們假定了服务时間和顾客到达时間間隔的分布，这里我們将考虑一般情形。人們对服务时間或者到达时間間隔遵循矩形分布，或者 χ^2-分布的情形作了許多研究❷。

对于一般情形，D. V. Lindley [1] 对只有一个窗口的情形証明了下列結果。

令 G_r 表示从第 r 个顾客出現到第 $(r+1)$ 个顾客出現的时間間隔，S_r 表示第 r 个顾客所要的服务时間。G_r 和 S_r 是随机变数。

(1) 設随机变数序列 $\{G_r\}$ $(r=1, 2, \cdots)$ 为相互独立。又設 G_r 遵循相同分布，并且 $EG_r<\infty$。

(2) 設 $\{S_r\}$ $(r=1, 2, \cdots)$ 也是独立的随机变数序列，S_r 遵循相同分布，并且 $ES_r<\infty$。

(3) 設 S_r 与 G_s $(r, s=1, 2, \cdots)$ 为独立。又設窗口只有一个，顾客按照到达次序接受服务。在这些假設之下，我們得到下列的

定理 28.1 設 $ES_r=b$, $EG_r=a$。令 W_r 表示第 r 个来到的

---

❶ (27.27)～(27.30) 的証明从略。见 P. M. Morse[1]。

❷ 参看例如 D. G. Kendall[1], [2]。

顾客的等待时間。于是恒有

$$\lim_{r\to\infty} P(W_r \leqslant x) = F(x).$$

若

$$\rho = \frac{b}{a} < 1, \tag{28.1}$$

则 $F(x)$ 是分布函数。若

$$\rho = \frac{b}{a} \geqslant 1, \tag{28.2}$$

则 $F(x)$ 恒等于 0。此外 $F(x)$ 还滿足

$$F(x) = \int_0^{\infty} F(y)\,dG(x-y). \tag{28.3}$$

这个結果还可以推广到有 s 个窗口的場合❶。我們仍然只叙述这些結果而不加以証明。設窗口的个数为 s，顾客到达时間为 $T_1, T_2, T_3, \cdots$。先到的顾客先接受服务。令 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 表示窗口，若所有窗口都挤滿，則下一个顾客在第一个終結服务的窗口接受服务。当顾客来到时，若有一个以上窗口閑着，則为方便計，假設这个顾客到足碼小的窗口去接受服务。

設 $T_0=0$，則 $G_i=T_i-T_{i-1}$ 是顾客到达的时間間隔。設

$$G(z)=P(G_i\leqslant z) \quad (令\ G(0)<1),$$

又令 S_i 为第 i 个顾客所要的服务时間。設 G_i 为独立并遵循相同分布，S_i 也为独立并遵循相同分布。設 $EG_i<\infty$，$ES_i<\infty$。令 W_{i1} 为第 i 个顾客的等待时間。$W_{i1}+T_i$ 是第 i 个顾客开始接受服务的时刻，$W_{i1}+T_i+S_i$ 是对第 i 个顾客服务結束的时刻。

从第 1 个到 $(i-1)$ 个顾客中在窗口 M_j 最后服务結束的时刻記为 T_i+u_{ij}。設 $u'_{ij}=\max(0, u_{ij})$。按 u'_{ij} 的大小次序排成

$$W_{i1}, W_{i2}, \cdots, W_{is}.$$

---

❶ 参看 J. Kiefer-J. Wolfowitz[1], [2].

W_{i1} 显然是第 i 个顾客的等待时間(与上面的 W_{i1} 相同)。設

$$W_i=(W_{i1}, W_{i2}, \cdots, W_{is}), \tag{28.4}$$

$$F_i(x_1, \cdots, x_s)=P(W_{i1}\leqslant x_1, W_{i2}\leqslant x_2, \cdots, W_{is}\leqslant x_s). \tag{28.5}$$

設 $x=(x_1, \cdots, x_s)$, $y=(y_1, \cdots, y_s)$, 又令 $W_i\leqslant x$ 表示 s 个不等式: $W_{i1}\leqslant x_1, \cdots, W_{is}\leqslant x_s$。又令 Q 为满足条件 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_s$ 的 s 維空間内的一个集合。令 $x, y\in Q$, 并且

$$F_i(x|y)=P(W_i\leqslant x|W_1=y), \tag{28.6}$$

$$F_i(x|0)=F_i(x).$$

再設 $\bar{x}_1=(x_1, \infty, \cdots, \infty)$, $F_i(\bar{x}_1)=F_i^*(x_1)$. 这是第 i 个顾客的等待时間的分布。这时可以証明

$$\lim_{i\to\infty} F_i(x)=F(x), \quad \lim_{i\to\infty} F_i^*(x)=F^*(x)$$

存在, 并且 $F^*(x_1)=F(\bar{x}_1)$. 又 $F^*(x)$ 和 $F(x)$ 要末都是分布函数,要末都不是分布函数。我們进一步得到下列的

定理 28.2 (1)若 $\rho=\dfrac{b}{sa}<1$, 則 $F(x)$ 是分布函数。(2)若 $\rho\geqslant 1$, 則 $F(x)$ 不是分布函数。(3) $\lim\limits_{i\to\infty} F_i(x|y)$ 不依賴于 y.

此外,我們还可以証明 $F(x)$ 满足某种积分方程,但这里不去討論它。

后　記

随机过程的应用，现在涉及的范圍已經相当广泛。从統計力学、物理学、通信工程学到心理学、經济学、社会学以及遺傳学，人們根据随机过程的理論，結合着实驗，已經掌握了各种规律。在本书中，我們特别选擇其中的几个項目，它們是以平稳过程論以及 Марков 过程論等比較近代的研究成果为背景的。对于实际上的应用，还有很多更細致的事項以及数値結果，因篇幅限制，一概从略，而把重点放在理論根据的叙述。著者的企图是，对迄今已比較广泛地为人們所知，但在理論上仍沒有明确写出的結果，重新給予理論闡述。

参考文献，只列举本书直接引用到的那些。

参考文献

D. Blackwell:

[1] A renewal theorem. Duke Math. Journ., **15** (1948).

[2] Extension of a renewal theorem, Pacific Journ. Math., **3** (1953).

K. L. Chung (鍾開萊):

[1] Some new developments in Markoff chains, Trans. Amer. Math. Soc., **75** (1955).

K. L. Chung (鍾開萊)-H. Pollard:

[1] An extension of a renewal theorem, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952).

D. R. Cox-W. L. Smith:

[1] A direct proof of a fundamental theorem of a renewal theory, Skandinavisk Aktuariotidskrift, **36** (1953).

R. C. Davis:

[1] On the theory of prediction of non-stationary stochastic processes, J. Applied Physics, **23** (1952).

J. L. Doob:

[1] Renewal theory from the point of view of the theory of probability, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948).

[2] Stochastic processes, Wiley, (1953).

W. Feller:

[1] On the integral equation of renewal theory, Ann. Math. Stat., **12** (1941).

U. Grenander-M. Rosenblatt:

[1] Statistical analysis of stationary time series, Wiley, (1957).

K. Karhunen:

[1] Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A, I. Math.-Physica, **37** (1947).

[2] Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen, Ark. Mat., **1** (1949).

S. Karlin:

[1] On the renewal equation, Pacific Journ. Math., **5** (1955).

T. Kawata (河田龍夫):

[1] A renewal theorem, Journ. Math. Soc. Japan, **8** (1956).

[2] Stationary process and harmonic analysis, Kodai Math. Sem. Rep., **5** (1953).

[3] 時系列および情報の理論とその応用, 第1編(日本科学技術連盟), (1953).

[4] Remarks on prediction problem in the theory of stationary stochastic processes, Tôhoku Math. Journ., 2nd Ser., **6** (1954).

[5] On the stochastic process of random noise, Kôdai Math. Sem. Rep., **7** (1955).

D. G. Kendall:

[1] Stochastic process occurring in the theory of queue and their analysis by the method of the imbedded Markoff chain, Ann. Math. Stat., **24** (1953).

[2] Some problems in the theory of queues, Journ. Royal Stat. Soc. B, **13** (1951), 151～173, 184～185.

J. Kiefer-J. Wolfowitz:

[1] On the theory of queues with many servers, Trans. Amer. Math. Soc., **75** (1955).

[2] On the characteristics of the general queuing process with applications to random walks, Ann. Math. Stat., **27** (1956).

J. H. Laning-R. H. Battin:

[1] Random processes in automatic control, McGraw-Hill, (1956).

W. Ledermann-G. E. H. Reuter:

[1] Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes, Phil. Trans. Royal Soc. London, A., **246** (1954).

P. Lévy:

[1] Systèmes markoviennes et stationaires. Cas dénombrable, Ann. Sci. École Norm. Sup., **68** (1951).

D. V. Lindley:

[1] The theory of queues with a single server, Proc. Camb. Phil. Soc., **48** (1952).

G. Maruyama (丸山儀四郎):

[1] Fourier analytic treatment of some problems on the sums of random variables, Natural Sci. Report, Ochanomizu Univ., **6** (1955).

P. M. Morse:

[1] Stochastic properties of waiting lines, Journal of the Operations Research Soc. Amer., **3** (1955).

S. O. Rice:

[1] Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal, **23** (1944), **24** (1945).

S. Täcklind:

[1] Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall, Skandinavisk Aktuarietidskrift, **27** (1944).

[2] Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem, Skandinavisk Aktuarietidskrift, **28** (1945).

宇田川銈久 中村義作:

[1] 非定常確率過程における重み函数について,電気通信學會志,(1956).

N. Wax:

[1] Selected papers on noise and stochastic process, Dover, New York.

N. Wiener:

[1] Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, New York, (1949).

L. Zadeh-R. Ragazzini:

[1] An extension of Wiener's theory of prediction, J. Applied Physics, **21** (1950).